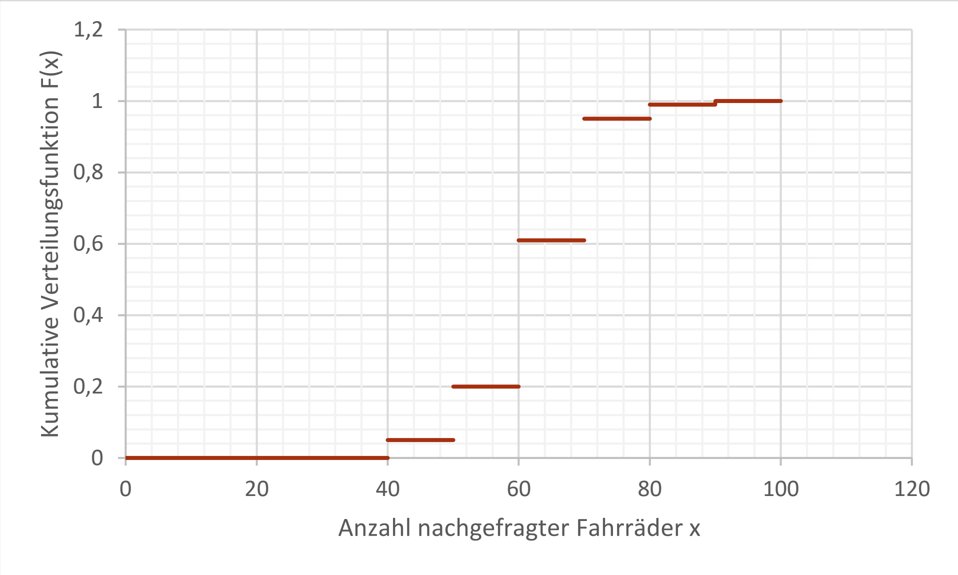
Lösungskatalog Produktionsmanagement

Thema 0 – Statistikauffrischung

Aufgabe 0.1 – das Sportwarengeschäft

a.



b. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = 40(0{,}05) + 50(0{,}15) + 60(0{,}41) + 70(0{,}34) + 80(0{,}04) + 90(0{,}01) = 62$

c. $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P(X = x_i) = (40-62)^2(0{,}05) + (50-62)^2(0{,}15) + (60-62)^2(0{,}41) + (70-62)^2(0{,}34) + (80-62)^2(0{,}04) + (90-62)^2(0{,}01) = 90 \rightarrow \sigma = \sqrt{90} = 9{,}487$

d. $P(\text{alle verkauft}) = P(X \geq 60) = 1 - F(50) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
$P(\text{nicht alle verkauft}) = 1 - P(\text{alle verkauft}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

e. $P(X \leq ?) = 0{,}95$

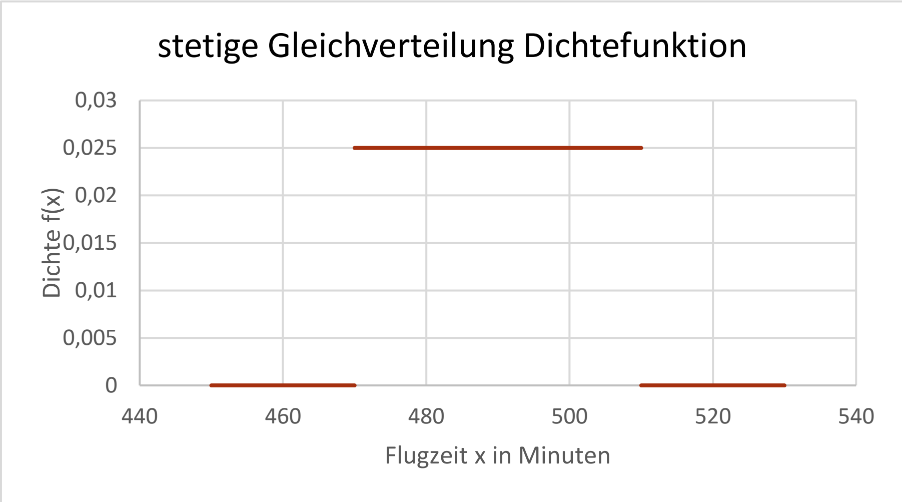
Anzahl		Relative	Kumuliert
40		0,05	0,05
50		0,15	0,2
60		0,41	0,61
70		0,34	0,95
80		0,04	0,99
90		0,01	1

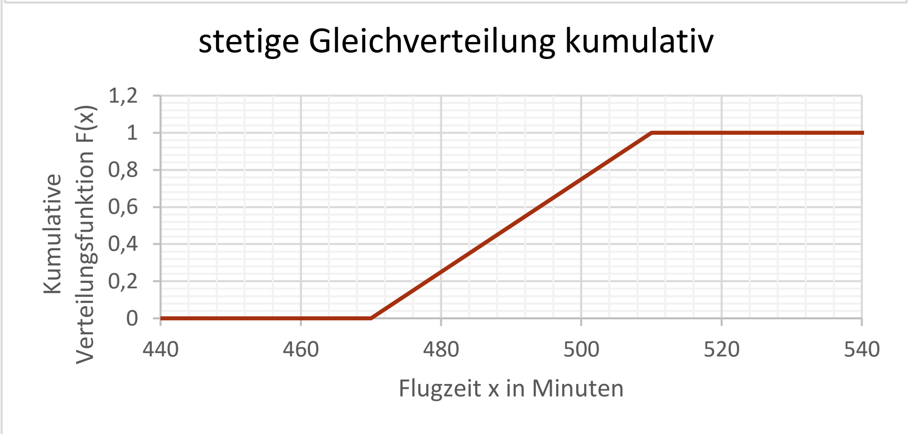
Mindestens 70 Fahrräder müssen bestellt werden.

f. Mögliche Antwort: Der Trade-Off zwischen zu viel und zu wenig Fahrrädern im Lager muss berücksichtigt werden, indem die Fehlbestands– und die Überbestandskosten abgewogen werden.

Aufgabe 0.2 – Lufthansa

a.





b. Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 5 min. Verspätung kann auf zwei Arten berechnet werden:

i. Im Graphen der Dichtefunktion entspricht diese Wahrscheinlichkeit dem Integral (der Fläche) unter der Dichte ab 497 Minuten. Diese berechnet sich zu:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 497) = \frac{13}{40} = 0{,}325.$$

ii. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann auch aus der kumulativen Verteilungsfunktion F(x) berechnet werden:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 497) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 497) = 1 - \mathrm{F}(497) = 1 - \frac{27}{40} = 0{,}325.$$

c. Wir haben eine Gleichverteilung zwischen Parametern $a = 470\mathrm{min}$ und $b = 510\mathrm{min}$. Es folgt:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}}{2} = \frac{470\mathrm{min} + 510\mathrm{min}}{2} = 490\ \mathrm{min}$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = \frac{(\mathrm{b} - \mathrm{a})^2}{12} = \frac{(510\mathrm{min} - 470\mathrm{min})^2}{12}$$
$$= \frac{400}{3}\ \mathrm{min}^2 \rightarrow \ \sigma = \sqrt{400\mathrm{min}^2/3} = 11{,}55\ \mathrm{min}$$

d. Je größer die Standardabweichung desto größer sind die Abweichungen der Flugzeiten vom Erwartungswert. Kunden empfinden starke Schwankungen in der Servicezeit, vor allem jedoch Verspätungen als störend. Deswegen wird meist eine längere Flugzeit als der Erwartungswert angegeben, wenn Schwankungen nicht vermieden werden können.

Aufgabe 0.3 – Aluminiumbleche

Verteilungsfunktion der Normalverteilung

z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
0,00	0,500000	0,60	0,725747	1,20	0,884930	1,80	0,964070	2,40	0,991802
0,01	0,503989	0,61	0,729069	1,21	0,886861	1,81	0,964852	2,41	0,992024
...									
0,42	0,662757	1,02	0,846136	1,62	0,947384	2,22	0,986791	2,82	0,997599
0,43	0,666402	1,03	0,848495	1,63	0,948449	2,23	0,987126	2,83	0,997673
0,44	0,670031	1,04	0,850830	1,64	0,949497	2,24	0,987455	2,84	0,997744
0,45	0,673645	1,05	0,853141	1,65	0,950529	2,25	0,987776	2,85	0,997814
0,46	0,677242	1,06	0,855428	1,66	0,951543	2,26	0,988089	2,86	0,997882
0,47	0,680822	1,07	0,857690	1,67	0,952540	2,27	0,988396	2,87	0,997948
0,48	0,684386	1,08	0,859929	1,68	0,953521	2,28	0,988696	2,88	0,998012
0,49	0,687933	1,09	0,862143	1,69	0,954486	2,29	0,988989	2,89	0,998074
0,50	0,691462	1,10	0,864334	1,70	0,955435	2,30	0,989276	2,90	0,998134

a. Annahme: X ist normalverteilt.

X – Länge eines Aluminiumbleches

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \sim N(175{,}64)$

Wir suchen $P(X \geq 193)$.

Um eine Standardnormalverteilung zu erhalten, standardisieren wir X, indem wir den Erwartungswert abziehen und das Ergebnis durch die Standardabweichung teilen. Am Ende schlagen wir den Wert der kumulierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung in einer Tabelle nach:

$$P(X \geq 193) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \geq \frac{193 - 175}{8}\right) = P(Z \geq 2{,}25) = 1 - P(Z < 2{,}25) = 0{,}0122$$

= 1,22%.

b. $P(X \geq ?) = 0{,}05$

Für standardisierte Werte:

$P(Z \geq ?) = 0{,}05$

$1 - P(Z < ?) = 0{,}05 \rightarrow P(Z < ?) = 0{,}95$

Aus der Standardnormalverteilungstabelle kann man folgenden Wert ablesen:

$P(Z < 1{,}65) > 0{,}95$. Folgt Z einer Standardnormalverteilung, ist also die Wahrscheinlichkeit, einen Wert von 1,65 oder weniger zu erhalten 0,9505 und damit die Wahrscheinlichkeit darüber zu liegen knapp unter 5%. Um zu unserem ursprünglichen X zurückzukommen, gehen wir wie folgt vor:

$$Z < 1{,}65 \rightarrow \frac{X - 175}{8} < 1{,}65 \rightarrow X > 175 + 1{,}65 * 8 = 188{,}2\text{cm}.$$

Aufgabe 0.4 – Kettensägen

a. Die erwartete Anzahl nachgefragter Kettensägen ergibt sich zu:

$\mathrm{E(x)} = 0{,}05 \times 40 + 0{,}25 \times 50 + 0{,}3 \times 60 + 0{,}25 \times 70 + 0{,}15 \times 80 = 62.$

b. Die Varianz ergibt sich zu:

$\mathrm{Var(x)} = \sigma^2 = 0{,}05 \times (40-62)^2 + 0{,}25 \times (50-62)^2 + 0{,}3 \times (60-62)^2 + 0{,}25 \times (70-62)^2 + 0{,}15 \times (80-62)^2 = 126$

Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz und daher folgt

$\sigma = \sqrt{126} = 11.22$

c. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 60) = 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}70 = 70\%.$

Aufgabe 0.5 – Schrauben

a. Es ist $\mathrm{E(X)} = 2\mathrm{cm}$ und $\sigma = 0{,}02\mathrm{cm}$ gegeben und die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(1{,}99 \leq \mathrm{X} \leq 2{,}02)$ ist gesucht.

Die Standardisierung von X zu Z liefert mit $\frac{2{,}02-2}{0{,}02} = 1$ und $\frac{1{,}99-2}{0{,}02} = -0{,}5$, dass

$\mathrm{P}(1{,}99 \leq \mathrm{X} \leq 2{,}02) = \mathrm{P}(-0{,}5 \leq \mathrm{Z} \leq 1) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq -0{,}5) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(-0{,}5) = 84{,}13\% - 30{,}85\% = 53{,}28\%.$

b. Ja, wenn man mit einem Erwartungswert von 2,005 cm produziert.

Die Antwort erschließt sich beispielsweise aus der Betrachtung der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung: In der obigen Aufgabe liegen die Intervallgrenzen des Bereiches, in dem die Abweichung der Schraubenlänge liegen darf, nicht symmetrisch um den Erwartungswert. Die Wahrscheinlichkeit, mehr brauchbare Schrauben zu produzieren steigt jedoch, wenn das Intervall symmetrisch um den Erwartungswert verteilt ist (solange die Intervallgrenzen gleich bleiben), also: $\frac{2{,}02+1{,}99}{2} = 2{,}005.$

c. Es gilt für die Gleichverteilung $\mathrm{E(X)} = \frac{a+b}{2}$ und $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$, sowie $\mathrm{F(X)} = \frac{x-a}{b-a}$.

Aus $\mathrm{E(X)} = \frac{a+b}{2} = 2\mathrm{cm} = 20\mathrm{mm}$ und $\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}}\mathrm{mm}$ ergibt sich durch Lösen dieses Gleichungssystems a = 1,9cm und b = 2,1cm und damit:

$\mathrm{F}(2{,}02) - \mathrm{F}(1{,}99) = \frac{2{,}02-1{,}9}{2{,}1-1{,}9} - \frac{1{,}99-1{,}9}{2{,}1-1{,}9} = 15\%.$

d. Die Summe aller Schrauben beträgt 1000. Damit sind $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1{,}980) = \frac{32}{1000} = 3{,}2\%$ und $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1{,}985) = 6{,}8\%$. Die anderen Schrauben liegen im erlaubten Verkaufsbereich. Somit folgt: $\mathrm{P}(1{,}990 \leq \mathrm{X} \leq 2{,}020) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1{,}985) = 100\% - 3{,}2\% - 6{,}8\% = 90\%.$

Aufgabe 0.6 – Schokoriegel

a. Es ist E(X)= 50 Gramm und $\sigma = 5\ \mathrm{Gramm}$ gegeben und X: „Gewicht eines Schokoriegels“ mit $P(x \leq X) = F(Z) = 0{,}6$ gesucht.

$F\left(\frac{X-50}{5}\right) = 0{,}6$

$$\frac{X-50}{5} = Z_{0{,}6}$$
$$\frac{X-50}{5} = 0.26$$
$X = 51.3$ Gramm

b. Die Standardisierung von X zu Z liefert mit $\frac{52-50}{5} = 0.4$ und $\frac{48-50}{5} = -0.4$, sodass $\mathrm{P}(48 \leq \mathrm{X} \leq 52) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 52) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 48) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0{,}4) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq -0{,}4) = \mathrm{F}(0{,}4) - \left(1 - \mathrm{F}(0{,}4)\right) = 0{,}655 - (1 - 0{,}655) = 0{,}655 - 0{,}345 = 0{,}31.$

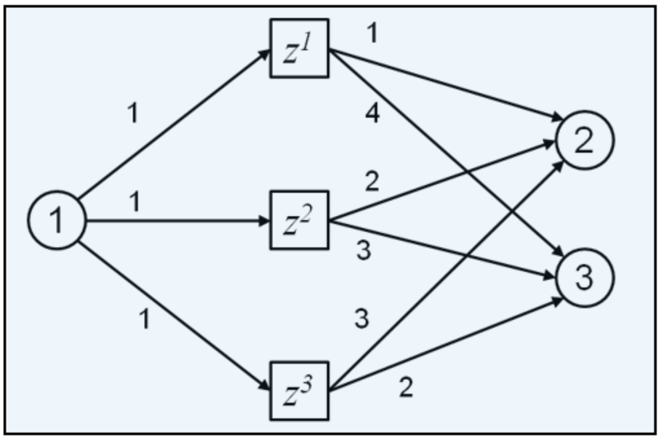
   80 000 x 0,31 = 24 800
   Es können maximal 24 800 Riegel verkauft werden.

c. Die Produktion scheint nicht sonderlich effizient zu sein, denn nur 31% der produzierten Riegel können verkauft werden, was im Umkehrschluss bedeutet, dass 69 % der produzierten Ware nicht den für den Verkauf geeignet ist.

Thema 1- Modellierung von Produktionsprozessen

Aufgabe 1.1 – Effiziente Produktion I

a.



b.

- Einstufige Technik
- 3 divergierende Grundaktivitäten
- Verfahrenswahl bei Nutzung eines Inputs

c.

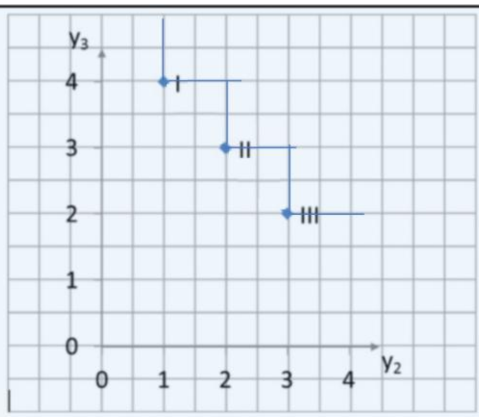
Lösung:

$$x_1 = 1\lambda^1 + 1\lambda^2 + 1\lambda^3$$

$$1\lambda^1 + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 = y_2$$

$$4\lambda^1 + 3\lambda^2 + 2\lambda^3 = y_3$$

Lösung



d.

e. Nur noch Aktivität III effizient

- desto weniger von Input 1, desto besser

- desto weniger von Output 3, desto besser

Lösung

$$DB_1 = 8*1 + 12*4 - 4*1 = 52$$

$$DB_2 = 8*2 + 12*3 - 4*1 = 48$$

$$DB_3 = 8*3 + 12*2 - 4*1 = 44$$

Aktivität 1 liefert den höchsten Erfolg

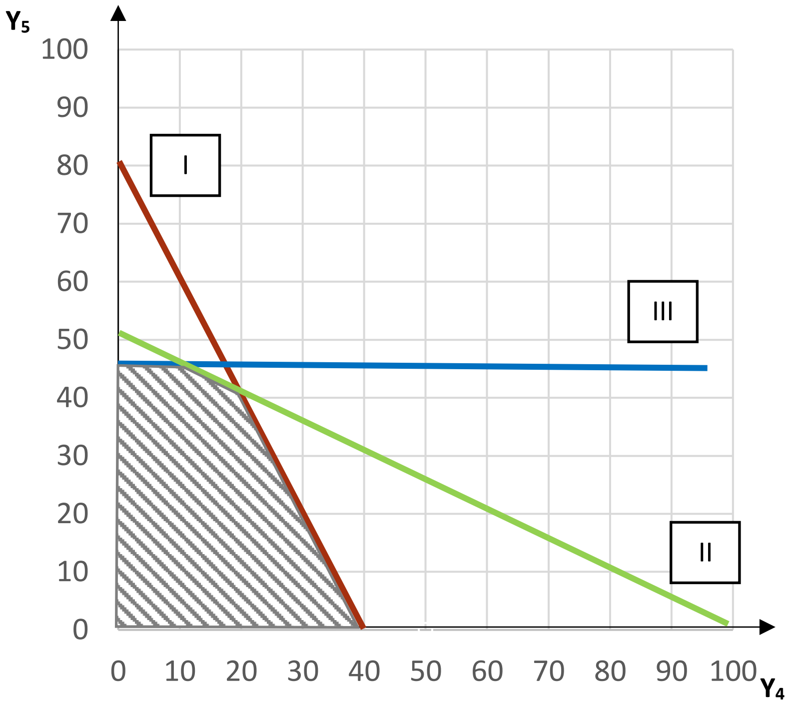
f.

Aufgabe 1.2 – Effiziente Produktion II

a. $$M = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \left\{ z \in \mathbb{R}^5 \,|\, z = \lambda^1 \cdot z^1 + \lambda^2 \cdot z^2,\ \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

b.

(I)	x_1	=	$4\ y_4$	+	$2\ y_5$	$\leq$	160
(II)	x_2	=	$1\ y_4$	+	$2\ y_5$	$\leq$	100
(III)	x_3	=			$3\ y_5$	$\leq$	135



Aufgabe 1.3 – Stufigkeit

a. - Einstufige Technik
   - 3 Konvergierende Grundaktivitäten
   - Verfahrenswahl bei der Herstellung eines Outputs

b.

$$T = \left\{ z \in IR^3 \mid z = z^1 \cdot \lambda^1 + z^2 \cdot \lambda^2 + z^3 \cdot \lambda^3, mit \;\; \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in \mathrm{N}_0 \right\}$$

$$= \left\{ z \in IR^3 \mid z = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2 + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^3, \; mit \;\; \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in \mathrm{N}_0 \right\}$$

c. Während Input 1 als unerwünscht eingestuft wird, werden Input 2 und Output 1 als erwünscht betrachtet. Das heißt es gilt

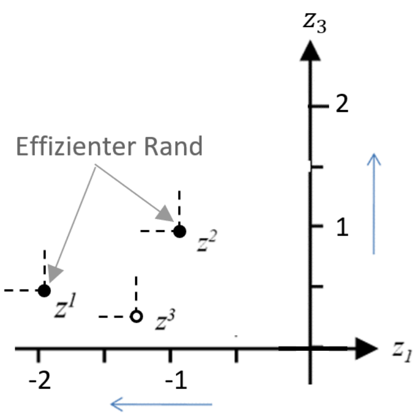
Input 1 ist unerwünscht → Ertrag

Input 2 ist erwünscht → Aufwand

Output 1 ist erwünscht → Ertrag

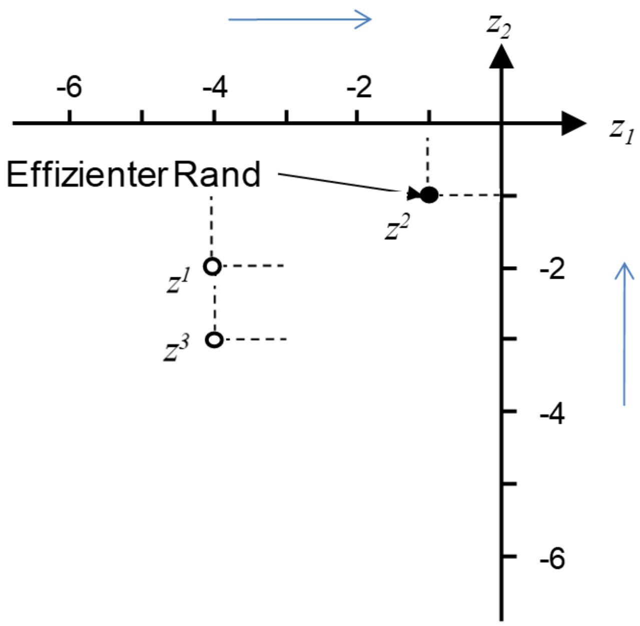
Daher müssen wir also nach Input 2 normieren. Das Normieren ergibt:

$$\tfrac{1}{2}z^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, 2z^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{3}z^3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



Der effiziente Rand der Technik besteht aus den Aktivitäten z^1 und z^2, da diese Aktivitäten von keiner anderen Aktivität dominiert werden. Aktivität z^1 dominiert z^3.

d. Da alle Objektarten erwünscht sind, sollte auf z^3 normiert werden. Diese liegen in der ursprünglichen Form schon vor. Der effiziente Rand der Technik besteht aus der Aktivität z^2, da diese Aktivität die beiden anderen Aktivitäten dominiert.
   Aktivität z^1 dominiert z^3.



Aufgabe 1.4 – die Bollerwagenproduktion

a. 8 Objektarten (6 Inputs, 2 Outputs)

Input: k = 1: Räder [Stück]
k = 2: Achsen [Stück]
k = 3: Deichsel [Stück]
k = 4: Holz [m²]
k = 5: Kindersitze [Stück]
k = 6: Getränkehalter [Stück]

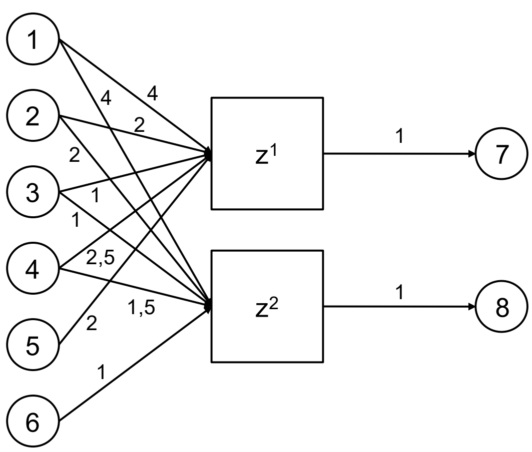
Output: k = 7: Family-Bollerwagen
K = 8: Party-Bollerwagen

Grundaktivitäten:

z^1: Herstellung eines Family-BW z^1= (-4, -2, -1, -2,5, -2, 0, 1, 0)

z^2: Herstellung eines Party-BW z^2= (-4, -2, -1, -1,5, 0, -1, 0, 1)

b.



c.

$$M = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \\ -1 & -1 \\ -2{,}5 & -1{,}5 \\ -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \;\;\; z^1 \quad\;\; z^2 \end{array} \begin{array}{c} \textit{Räder}\ (k=1) \\ \textit{Achsen}\ (k=2) \\ \textit{Deichsel}\ (k=3) \\ \textit{Holz}\ (k=4) \\ \textit{Kindersitze}\ (k=5) \\ \textit{Getränkehalter}\ (k=6) \\ \textit{Family-BW}\ (k=7) \\ \textit{Party-BW}\ (k=8) \\ \\ \end{array}$$

d. $T = \left\{ z \in R^8 \mid z = \lambda^1 \cdot z^1 + \lambda^2 \cdot z^2, \quad \lambda^1, \lambda^2 \in \mathrm{N}_0 \right\}$

e. Die Technik *T* enthält alle möglichen Aktivitäten. Der Produktionsraum *Z* beschreibt hingegen jenen Bereich der Technik *T*, der unter Einbeziehung von Restriktionen bezüglich der Produktionsmöglichkeiten tatsächlich möglich ist.

Eine formale Beschreibung dieser Restriktionen durch das Restriktionenfeld *R* lautet:

$$R = \left\{ z \epsilon \mathbb{R}^8 \,\middle|\, z^{min} = \begin{pmatrix} -4800 \\ -1800 \\ -1400 \\ -2100 \\ -1000 \\ -700 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq z \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \\ 550 \end{pmatrix} = z^{max} \right\}$$

Der Produktionsraum Z ergibt sich somit gemäß $Z = T \cap R$ und lässt sich formal beschreiben als:

$$Z = \left\{ z \epsilon \mathbb{R}^8 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -4800 \\ -1800 \\ -1400 \\ -2100 \\ -1000 \\ -700 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq z = \lambda^1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \\ -2{,}5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \\ 550 \end{pmatrix}, mit\ \lambda^1, \lambda^2 \epsilon \mathbb{N}_0^+ \right\}$$

f. Schritt 1: Formulierung als algebraische Ungleichungen

(I)	x_1	=	$4\,\lambda^1$	+	$4\,\lambda^2$	≤	4800
(II)	x_2	=	$2\,\lambda^1$	+	$2\,\lambda^2$	≤	1800
(III)	x_3	=	$1\,\lambda^1$	+	$1\,\lambda^2$	≤	1400
(IV)	x_4	=	$2{,}5\,\lambda^1$	+	$1{,}5\,\lambda^2$	≤	2100
(V)	x_5	=	$2\,\lambda^1$			≤	1000
(VI)	x_6	=			$1\,\lambda^2$	≤	700
(VII)	y_{Family}	=	λ^1			≤	600
(VIII)	y_{Party}	=			λ^2	≤	550
(IX)	y_{Family}					≥	0
(X)	y_{Party}					≥	0

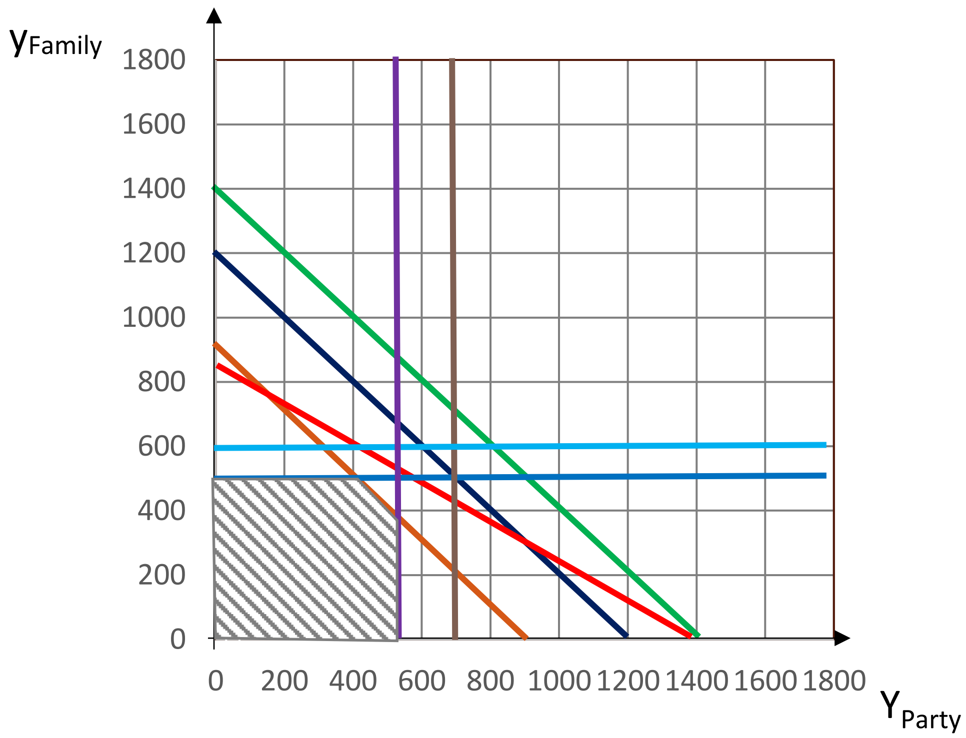
Schritt 2: Substitution der Aktivitätsniveaus ($y_{Family} = \lambda^1$, $y_{Party} = \lambda^2$):

(I)	x_1	=	4 y_{Family}	+	4 y_{Party}	≤	4800
(II)	x_2	=	2 y_{Family}	+	2 y_{Party}	≤	1800
(III)	x_3	=	1 y_{Family}	+	1 y_{Party}	≤	1400
(IV)	x_4	=	2,5 y_{Family}	+	1,5 y_{Party}	≤	2100
(V)	x_5	=	2 y_{Family}			≤	1000
(VI)	x_6	=			1 y_{Party}	≤	700
(VII)	y_{Family}					≤	600
(VIII)	y_{Party}					≤	550
					y_{Family}, y_{Party}	≥	0

Schritt 3: Umformung

(I)	y_{Family}	+		≤	1200 - y_{Party}
(II)	y_{Family}	+		≤	900 - y_{Party}
(III)	y_{Family}	+		≤	1400 - y_{Party}
(IV)	y_{Family}	+		≤	840 - 0,6 y_{Party}
(V)	y_{Family}			≤	500
(VI)	y_{Party}			≤	700
(VII)	y_{Family}			≤	600
(VIII)	y_{Party}			≤	550
			y_{Family}, y_{Party}	≥	0

Schritt 4: Einzeichnen im Koordinatensystem (Output/Output-Diagramm)



Aufgabe 1.5 – Antriebswellenfertigung

a. 8 Objektarten: 3 Input, 3 Output + 2 Zwischenprodukte

(Details nicht aus Matrix erkennbar:)

Input:

k=1: Eisenstangen von 3m Länge [Stück]

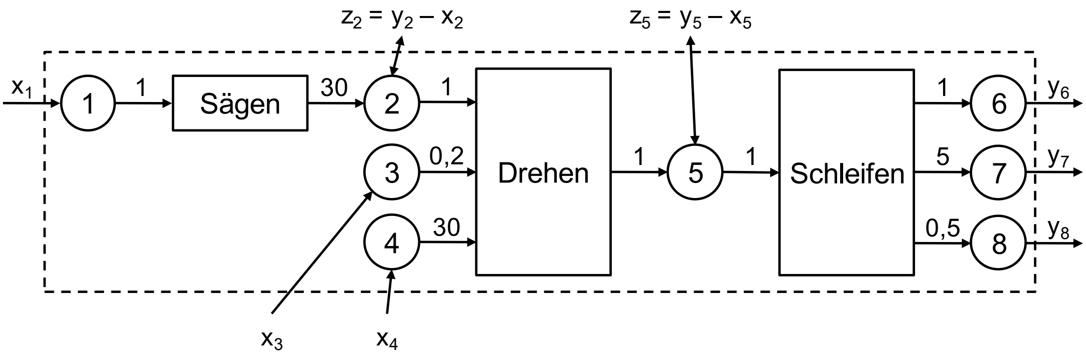
k=3: Kühlwasser [l]

k=4: Drehmaschine [s: Einsatzzeit in sec.]

Zwischenprodukte:
k=2: Eisenstücke von 10cm Länge [Stück]
k=5: ungeschliffene Wellen [Stück]

Output:
k=6: geschliffene Wellen [Stück]
k=7: Metallspäne [g]
k=8: Abwasser [l]

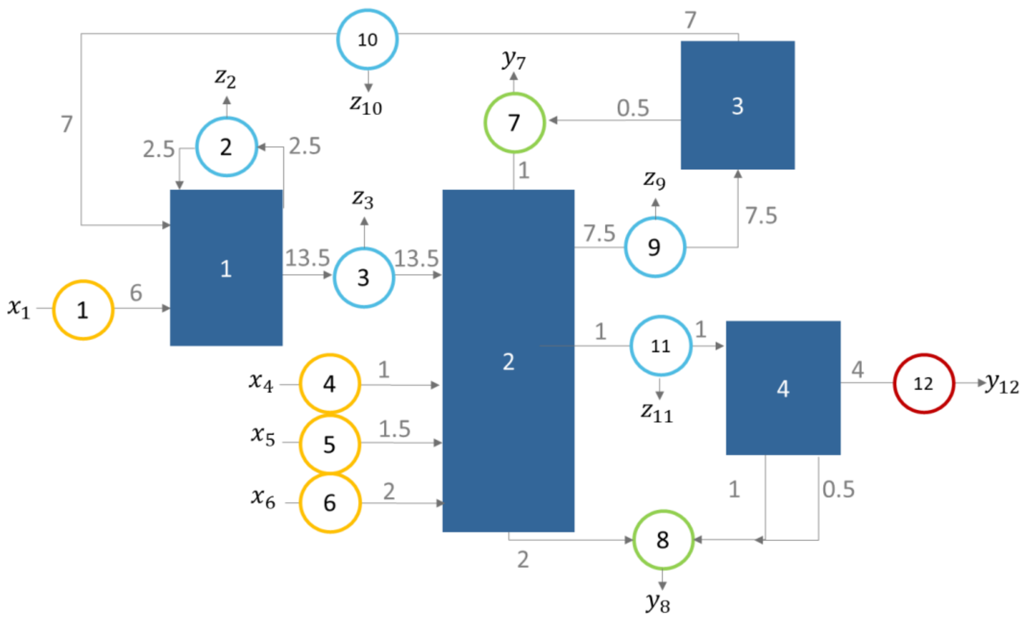
I/O-Graph:



Der mehrstufige Charakter der Produktion zeigt sich darin, dass in der zweiten und der fünften Zeile der Technikmatrix sowohl positive als auch negative Einträge vorkommen. → Eisenstücke und ungeschliffene Wellen sind sowohl Inputs als auch Outputs unterschiedlicher Produktionsstufen.
Die Fertigung enthält jedoch keinen Zyklus, da kein Zwischenprodukt einer vergangenen Aktivität wieder zugeführt wird.

Aufgabe 1.6 – Additive Fertigung

a. I/O-Graph



b. Stufigkeit/ Struktur/ Besonderheiten:

- Mehrstufige Technik
- Zyklische Technik mit Schlinge/Schleife
- Grundaktivität 1 und 2 weisen eine umgruppierende Struktur auf während Grundaktivität 3 und 4 eine divergierende
- Nicht outputseitig determiniert (es gibt mehrere Outputs bei den Grundaktivitäten 1 und 2)

c. Technikmatrix M

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13.5 & -13.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1.5 \\ 0 & 7.5 & -7.5 & 0 \\ 7 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d. Technik T

$$\mathrm{T} = \left\{ \mathrm{z} \in \mathbb{R}^{12} \,\middle|\, \mathrm{z} = \mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \lambda^4 \end{pmatrix}, \text{für } \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \geq 0 \right\}$$

e. Algebraisches Modell in x/y-Schreibweise

$$\begin{aligned}
x_1 &= 6\lambda^1 \\
x_4 &= \lambda^2 \\
x_5 &= 1.5\,\lambda^2 \\
x_6 &= 2\,\lambda^2 \\
x_3 + 13.5\,\lambda^1 &= 13.5\lambda^2 + y_3 \\
x_9 + 7.5\lambda^2 &= 7.5\lambda^3 + y_9 \\
x_{11} + \lambda^2 &= \lambda^4 + y_{11} \\
x_{10} + 7\lambda^3 &= 7\lambda^1 + y_{10} \\
\lambda^2 + 0.5\lambda^3 &= y_7 \\
2\lambda^2 + 1.5\lambda^4 &= y_8 \\
4\lambda^4 &= y_{12}
\end{aligned}$$

Ersetze: $z_k = y_k - x_k$

$$\begin{aligned} x_1 &= 6\lambda^1 \\ x_4 &= \lambda^2 \\ x_5 &= 1.5\,\lambda^2 \\ x_6 &= 2\,\lambda^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 13.5\,\lambda^1 - 13.5\,\lambda^2 \\ z_9 &= 7.5\lambda^2 - 7.5\lambda^3 \\ z_{11} &= \lambda^2 - \lambda^4 \\ z_{10} &= -7\lambda^1 + 7\lambda^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 0.5\lambda^3 &= y_7 \\ 2\lambda^2 + 1.5\lambda^4 &= y_8 \\ 4\lambda^4 &= y_{12} \end{aligned}$$

f. Kosten je Charge = 1€ x (6 + 1 + 1.5 + 2) = 10.50€

Kosten je Bauteil = 10.50€ / 4 = 2.625€ ~ 2.63€
Gewinn je Bauteil = 5€ - 2.63€ = <u>2.37€</u>

Aufgabe 1.7 – Effizienzanalyse *Recycling*

a. Alle Objektarten sind erwünscht, d.h. die beiden Inputs sind Aufwände und der Output ist ein Ertrag. Daher normieren wir auf den Output, die Normierung ergibt:

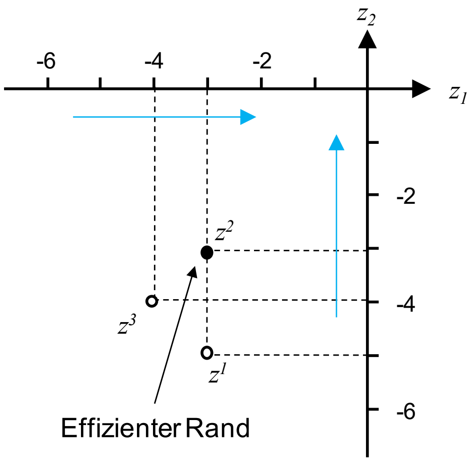
$$z^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z^3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ <+ \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = z^2$$ → Dominanzrelation: z^2 dominiert z^1

$$z^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +> \\ <+ \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = z^3$$ → keine Dominanzrelation

$$z^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +> \\ +> \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = z^3$$ → Dominanzrelation: z^2 dominiert z^3

b.



Der effiziente Rand besteht aus Aktivität z^2

c. Inputs unerwünscht -> Ertrag

Output erwünscht -> Ertrag

Da alle Objektarten Erträge darstellen, wird nicht normiert.

$$z^1 = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ > \\ < \end{matrix} z^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ z^2 dominiert z^1

$$z^1 = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ > \\ < \end{matrix} z^3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$ z^3 dominiert z^1

$$z^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} > \\ > \\ < \end{matrix} z^3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$ z^3 dominiert z^2

z^3 bildet effizienten Rand.

Aufgabe 1.8 – Effizienzanalyse Wahr oder Falsch

	wahr	**falsch**
…sie z^2 und z^3 dominiert.	X	
...sie von keiner anderen Grundaktivität dominiert wird.	X	

...sie bezogen auf eine erwünschte Objektart den höchsten Koeffizienten hat.		X
...sie z^2 dominiert.		X
...sie Teil des effizienten Randes ist.	X	
…sie bei einem graphischen Vergleich am nordöstlichsten liegt.		X

Thema 2 – Leistungsanalyse

Aufgabe 2.1 – Wahr oder Falsch?

1) Falsch, da immer gilt: $\mathrm{E}(\mathrm{T_a}) \geq 0$ und $\sigma(\mathrm{T_a}) \geq 0$.
2) Wahr.
3) Falsch, die Wartezeit geht gegen unendlich.

Aufgabe 2.2 – Geldautomat und Faltungsmaschine

a. Die Ankunftsrate beträgt 60 Personen pro Tag = 60/(24*60) Personen pro Minute = 1/24 Personen pro Minute und damit ergibt sich die erwartete Zwischenankunftszeit $\mathrm{E}(\mathrm{T_a})$= 24 min. Mit der erwarteten Servicezeit $\mathrm{E}(\mathrm{T_s})$ = 2 min folgt für die Auslastung $\rho = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{T_s})}{\mathrm{E}(\mathrm{T_a})} = \frac{2}{24} = 8{,}33\%$.

b. Mit $\rho = 50\%$ und $\mathrm{E}(T_a)$= 3 min folgt $\mathrm{E}(\mathrm{T_s}) = \rho \times \mathrm{E}(\mathrm{T_a}) = 0{,}5 \times 3\mathrm{min} = 1{,}5\ \mathrm{min}$.

Aufgabe 2.3 – Arbeitsvermittlung

a. Da die mittlere Zwischenankunftszeit 15 min ist, kommen 1/15 min = 0,0667 Kunden/Minute = 4 Kunden/Stunde an. Da Kunden nur durch Bedienung die Arbeitsvermittlung verlassen, entspricht dies auch dem Durchsatz.

b. Die durchschnittliche Wartezeit eines Kunden beträgt 3 Stunden (mittlere Servicezeit), das Wartezimmer füllt sich mit einer Ankunftsrate von 4 Kunden/Stunde (Ankunftsrate). Die durchschnittliche Anzahl an Kunden im Warteraum (mittlerer Bestand) ist daher berechenbar als Produkt der mittleren Servicezeit und der Ankunftsrate: 3 Stunden * 4 Kunden/Stunde = 12 Kunden (Gesetz von Little). Es werden daher mindestens 2 zusätzliche Stühle im Wartezimmer benötigt.

Aufgabe 2.4 – Fast Food Drive Through

a) Der Erwartungswert der Zwischenankunftszeiten $\mathrm{E}(\mathrm{T_a})$ ist 6 Minuten, der Erwartungswert der Servicezeiten $\mathrm{E}(\mathrm{T_s})$ ist $\mathrm{E}(\mathrm{T_s}) = 0{,}5(2\mathrm{min}) + 0{,}5(4\mathrm{min}) = 3\mathrm{min}$. Die Auslastung ist daher

$$\rho = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{T_s})}{\mathrm{E}(\mathrm{T_a})} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%.$$

b) Wir wissen $\mathrm{E}(\mathrm{T_a}) = 6\mathrm{min}$ und $\sigma(\mathrm{T_a}) = 3\mathrm{min}$. Der Variationskoeffizient des Ankunftsprozesses ist daher $\mathrm{c_a} = \frac{\sigma(\mathrm{T_a})}{\mathrm{E}(\mathrm{T_a})} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

c) Die Varianz der Bedienzeiten berechnet sich als

$$\mathrm{Var}(\mathrm{T_s}) = \sum_{\mathrm{i}} \left(\mathrm{x_i} - \mathrm{E(X)}\right)^2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x_i}) = 0{,}5(2\mathrm{min} - 3\mathrm{min})^2 + 0{,}5(4\mathrm{min} - 3\mathrm{min})^2 \qquad = 1\mathrm{min}^2$$

Die Standardabweichung beträgt somit $\sigma(\mathrm{T_s}) = 1\mathrm{min}$.

Der Variationskoeffizient des Bedienprozesses ist daher $\mathrm{c_s} = \frac{\sigma(\mathrm{T_s})}{\mathrm{E}(\mathrm{T_s})} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

d) Die durchschnittliche Wartezeit berechnet sich als Summe der Wartezeit in der Warteschlange (Kingman-Abschätzung) plus der Servicezeit:

$$\mathrm{E(W)} = \mathrm{E}(\mathrm{W_q}) + \mathrm{E}(\mathrm{T_s}) \approx \frac{\mathrm{c_a^2} + \mathrm{c_s^2}}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \mathrm{E}(\mathrm{T_s}) + \mathrm{E}(\mathrm{T_s})$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} \cdot \frac{0{,}5}{1 - 0{,}5} \cdot 3\text{min} + 3\text{min} = \frac{\left(\frac{9}{36}\right) + \left(\frac{4}{36}\right)}{2} \cdot 1 \cdot 3\text{ min} + 3\text{min}$$

$$= \frac{13}{24}\text{min} + 3\text{min} \approx 3{,}54\text{min}.$$

Die durchschnittliche Wartezeit ist also ca. 3,54 Minuten.

Aufgabe 2.5 – Consulting HR

a) Die Anzahl der Neueinstellungen pro Jahr entspricht der Ankunftsrate auf der Stufe „Associates". Nach Little:
$\text{mittlerer Bestand L} = \text{Ankunftsrate } \lambda * \text{mittlere Warte} - \text{und Servicezeit W}$

$$\Rightarrow \lambda \text{ auf Stufe Associates} = \frac{\text{L Associates}}{\text{W Associates}} = \frac{200 \text{ Associates}}{4 \text{ Jahre}} = 50 \frac{\text{Associates}}{\text{Jahr}}$$

b) $\text{Ankunftsrate } \lambda \text{ auf Stufe Partner} = \frac{20 \text{ Partner}}{10 \text{ Jahre}} = 2 \frac{\text{Partner}}{\text{Jahre}}$. Die Antwort ergibt sich als $\frac{\text{Ankunftsrate } \lambda \text{ auf Stufe Partner}}{\text{Ankunftsrate } \lambda \text{ auf Stufe Associate}} = \frac{2\ /\text{Jahr}}{50\ /\text{Jahr}} = 0{,}04 = 4\%.$

Aufgabe 2.6 – Variabilität

a) Intuitiv hätte wahrscheinlich Ankunftsprozess 1 eine höhere Variabilität als Ankunftsprozess 2.

b) Ankunftsprozess 1:

$$E(T_{a1}) = \sum_{\text{alle i}} t_i\, P(T = t_i) = 1\text{min} * 0{,}8 + 6\text{min} * 0{,}2 = 2\text{min}$$

$$Var(T_{a1}) = \sum_{\text{alle i}} (t_i - E(T_{a1}))^2\, P(T = t_i) = (1\text{min} - 2\text{min})^2(0{,}8) + (6\text{min} - 2\text{min})^2(0{,}2)$$
$$= 4\text{min}^2$$

$$\sigma(T_{a1}) = \sqrt{4\text{min}^2} = 2\text{min}$$

Ankunftsprozess 2:

$$E(T_{a1}) = \sum_{\text{alle i}} t_i\, P(T = t_i) = 61\text{min} * 0{,}8 + 66\text{min} * 0{,}2 = 62\text{min}$$

$$Var(T_{a2}) = \sum_{\text{alle i}} (t_i - E(T_{a2}))^2\, P(T = t_i)$$
$$= (61\text{min} - 62\text{min})^2(0{,}8) + (66\text{min} - 62\text{min})^2(0{,}2) = 4\text{min}^2$$

$$\sigma(T_{a2}) = \sqrt{4\text{min}^2} = 2\text{min}$$

Da der Variationskoeffizient das Verhältnis aus Standardabweichung und Erwartungswert bildet, ist der Variationskoeffizient von Ankunftsprozess 2 kleiner als der von Ankunftsprozess 1 und entspricht eher dem intuitiven Verständnis von Variabilität:

$$c_a = \frac{\sigma(T_a)}{E(T_a)}$$

$c_{a1} = \frac{2}{2} = 1{,}00$ und $c_{a2} = \frac{2}{62} = 0{,}03$

Aufgabe 2.7 – die Mensa

a) Für den Burger wissen wir:

$$\rho_B = \frac{E[T_s]}{E[T_a]} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}, \quad c_{a_B} = \frac{\sigma[T_a]}{E[T_a]} = \frac{4}{0{,}75} = 5{,}33, \quad c_{s_B} = \frac{\sigma[T_s]}{E[T_s]} = \frac{1}{0{,}5} = 2$$

und damit $E(W) = E(W_q) + E(T_s) = \frac{{c_{aB}}^2 + {c_{sB}}^2}{2} \cdot \frac{\rho_B}{1-\rho_B} \cdot E(T_s) + E(T_s) \approx 16{,}72\text{min}.$

Für die Pizza wissen wir:

$$\rho_P = \frac{1}{3}, \ c_{a_P} = \frac{\sigma[T_a]}{E[T_a]} = \frac{6}{2} = 3, \ c_{s_P} = \frac{\sigma[T_s]}{E[T_s]} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

und damit

$$E(W) = E(W_q) + E(T_s) = \frac{{c_{aS}}^2 + {c_{sS}}^2}{2} \cdot \frac{\rho_S}{1-\rho_S} \cdot E(T_s) + E(T_s) \approx 3{,}67\text{min}.$$

Da die Durchlaufzeit nur für die Pizza weniger als 15 Minuten beträgt, sollte sich Sarah für die Pizza anstellen.

b) Dann könnte Sarah nach 3 min Wartezeit in der Schlange und ca. 0,67 min Servicezeit mit dem Essen beginnen und wäre um ca. 12:49 Uhr fertig. Sarah käme also vermutlich nicht zu spät zur Vorlesung.

Es ergibt sich folgendes Ranking: 2, 1, 3 wenn man die mittlere Durchlaufzeit vergleicht.

Aufgabe 2.8 – das Bahnunternehmen

Geg.:

T_s = 20 min/Job

σ_{T_s} = 15 min/Job

λ = 4 Jobs/h

σ_{T_a} = 5 min/Job

a) T_a = 1 / λ = ¼ h/Job = 15 min/Job
$\rho = T_s \ / T_a$ = 20 / 15 = 133,33%
Auslastung über 100% -> langfristig Wartezeit unendlich

b)

$$E(W_q) \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Variabilität

Auslastung

Erwartete Servicezeit

Reduktion Variabilität -> z.B. Formular einführen, damit Informationen einheitlich aufgeführt eintreffen

Reduktion Auslastung -> z.B. FAQs einführen/erweitern

Reduktion Servicezeit -> z.B. Automatisierte Bearbeitung von häufigen Beschwerden

c) Das System ist noch nicht im eingeschwungenen Zustand (langfristig stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten).

Aufgabe 2.9 – ProTUce | Einführung in die Spielmaske

a) $\rho = \frac{E[T_s]}{n*E[T_a]} = \frac{40\frac{min}{Maschine}}{3\ Maschinen*10min} = 1{,}33$

b) Die berechnete Auslastung von über 100% zeigt, dass die Anzahl der eintreffenden Bestellungen die Kapazität des Workshops überschreitet. Dies bedeutet, dass mehr Bestellungen eintreffen, als in derselben Zeit bearbeitet werden können.
1. Warteschlangenbildung: Aufgrund der Überlastung entsteht eine Warteschlange der eintreffenden Bestellungen. Dadurch verlängert sich die Durchlaufzeit Bestellungen um die jeweilige Wartezeit.
2. Lieferverzögerungen und Umsatzverlust: Dem Sales Office lässt sich entnehmen, dass die Lieferzeit einer Bestellung nicht mehr als 24 Stunden betragen darf. Bei Überschreitung der angegebenen Lieferzeit, zahlt der Kunde nichts, er erhält jedoch weiterhin seine Bestellung. Durch die konstant größer werdende Warteschlange, erhöht sich die Wartezeit für neu eintreffende Aufträge. Ab einem bestimmten Punkt werden alle nachfolgenden Aufträge unwirtschaftlich, da sie nicht innerhalb der angegebenen Lieferzeit bearbeitet werden können.

c)

- Erhöhung der Kapazität (mehr Maschinen)
- Warteschlangenpolitik der Werkstatt ändern (FIFO → LIFO)

d)

Auftrag	Eingang	Ausgang	Lieferzeit [h]	Verspätung [h]
1	1.1.25 0:10	01.01.2025 00:50	0:40:00	0:00:00
2	1.1.25 0:20	01.01.2025 01:00	0:40:00	0:00:00
3	1.1.25 0:30	01.01.2025 01:10	0:40:00	0:00:00
4	1.1.25 0:40	01.01.2025 01:30	0:50:00	0:10:00
5	1.1.25 0:50	01.01.2025 01:40	0:50:00	0:10:00
6	1.1.25 1:00	01.01.2025 01:50	0:50:00	0:10:00
7	1.1.25 1:10	01.01.2025 02:10	1:00:00	0:20:00
8	1.1.25 1:20	01.01.2025 02:20	1:00:00	0:20:00
9	1.1.25 1:30	01.01.2025 02:30	1:00:00	0:20:00
421	3.1.25 22:10	04.01.2025 22:10	24:00:00	23:20:00
422	3.1.25 22:20	04.01.2025 22:20	24:00:00	23:20:00
423	3.1.25 22:30	04.01.2025 22:30	24:00:00	23:20:00

423 Bestellungen haben eine Lieferzeit von <= 24 Stunden. → 423*60 = 25.380 EUR

e)

Mitarbeiter [Anzahl]	Warteschlangepolitik	Endkapital [€]
3	FIFO	35.380
3	LIFO	55.180
4	FIFO	65.180
4	LIFO	65.180

Thema 3 – Produktionsprogrammplanung und aggregierte Planung

Aufgabe 3.1 – LP Isolierungsmittel

a) Aus der Nichtnegativitätsbedingung geht hervor, dass der Ursprung Eckpunkt des zulässigen Lösungsraumes ist. Um weitere Eckpunkte zu berechnen, werden die Nebenbedingungen als Ungleichungen bzw. Geradengleichungen aufgestellt. Mithilfe der Ungleichungen und Nullsetzen einer Komponente können die Achsenschnittpunkte ermittelt werden.

Aus den Geradengleichungen geht der Ordinatenabschnitt direkt hervor, durch Nullsetzen der Gleichungen erhält man die Schnittpunkte mit der Abszisse. Die Schnittpunkte zweier Gleichungen werden durch Gleichsetzen zweier Geradengleichungen ermittelt.

<u>Nebenbedingungen</u>

(i) $X_R + X_B \leq 30$ LKW pro Tag (NB1)

(ii) $2{,}8X_R + 1{,}4X_B \leq 70$ Maschine (NB2)

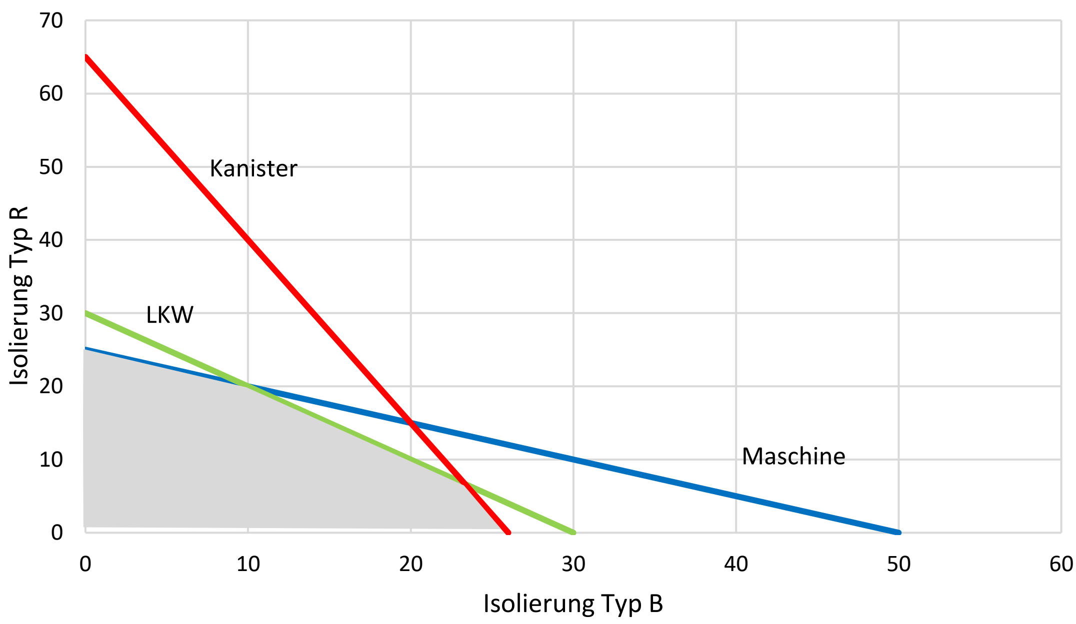
(iii) $X_R + 2{,}5X_B \leq 65$ flammenfestes Material (NB3)

<u>Geradengleichungen</u>

(i) $X_R(X_B) = 30 - X_B$

(ii) $X_R(X_B) = 25 - 0{,}5X_B$

(iii) $X_R(X_B) = 65 - 2{,}5X_B$



Die Eckpunkte des Lösungsraumes liegen somit bei (0;0), (0;25), (10;20), (23,33;6,67) und (26;0).

b) Der angegebene Produktionsplan kann nicht optimal sein, da er nicht auf dem Rand des zulässigen Bereichs liegt und die Zielfunktion somit weiter nach außen verschoben werden könnte. Ein optimaler Produktionsplan muss allerdings nicht jede Nebenbedingung ausreizen (mit Gleichheit erfüllen).

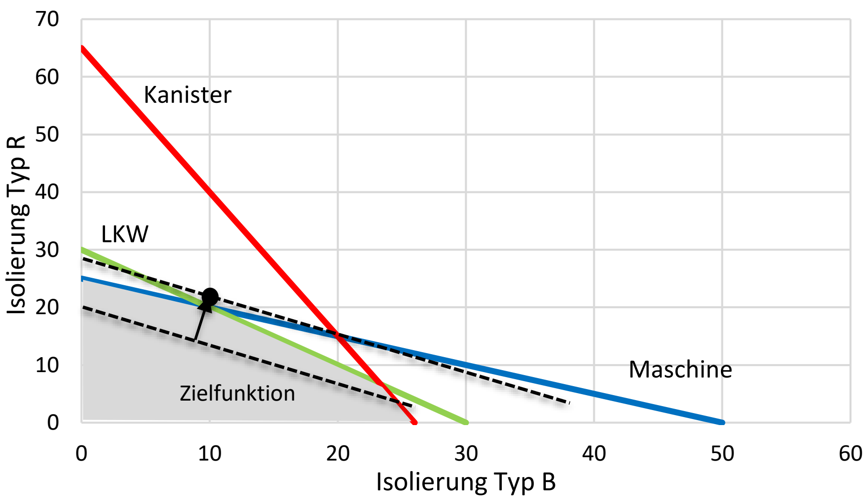
c) **Graphische Lösung:**

Zum Lösen dieser Aufgabe ist es hilfreich, die Zielfunktion einzuzeichnen. Um dies zu tun, kann man folgende Überlegung anstellen:

B hat einen Deckungsbeitrag von 950€ und R von 1200€. Wenn 0 Mengeneinheiten von R hergestellt werden und 1200 Mengeneinheiten von B, nimmt der Zielfunktionswert daher den gleichen Wert an, wie wenn 950 Mengeneinheiten von R hergestellt werden und 0 von B.

An diesen Punkten könnte also sofort die Zielfunktion eingezeichnet werden. Da diese Werte aber weit außerhalb des Wertebereichs des vorgegebenen Diagramms liegen, sollte man sie beispielsweise beide durch 100 teilen. Wahlweise kann auch die Steigung berechnet und die Zielfunktion an geeigneten Punkten eingezeichnet werden. Die Steigung ist 950/1200 = 19/24 und geeignete Punkte sind damit (0;19) und (24;0).

Nun muss die Zielfunktion nur noch so weit wie möglich nach oben rechts verschoben werden und man erhält den Eckpunkt (10;20), welcher den optimalen Produktionsplan darstellt.



Rechnerische Lösung:

Für die rechnerische Lösung benötigt man die Schnittpunkte der Nebenbedingung (LKW oder Maschine) mit der Zielfunktion $\mathrm{db} = 950\mathrm{x_B} + 1200\mathrm{x_R}$.

$$\mathrm{db}(\mathrm{X_B} = 10;\ \mathrm{X_R} = 20) = 10 \cdot 950 + 20 \cdot 1200 = 33500$$

Mit dem gewinnoptimalen Punkt $(\mathrm{X_B} = 10; \mathrm{X_R} = 20)$ erwirtschaftet man 33500 €.

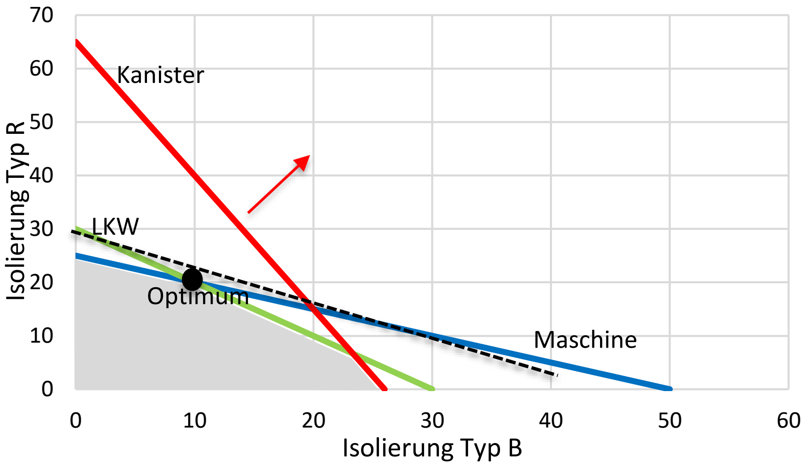
d)

i) Die Auslastung ergibt sich wie folgt:

Durchsatz/ Kapazität = (10*1,4 + 20*2,8) /70 = 70/70 = 100%
Die Lösung ist auch aus der Grafik erkennbar: Da der Punkt des optimalen Produktionsprogramms genau auf der Geraden, welche die Nebenbedingung der Maschinenkapazität beschreibt, liegt, beträgt die Auslastung 100%.

ii)

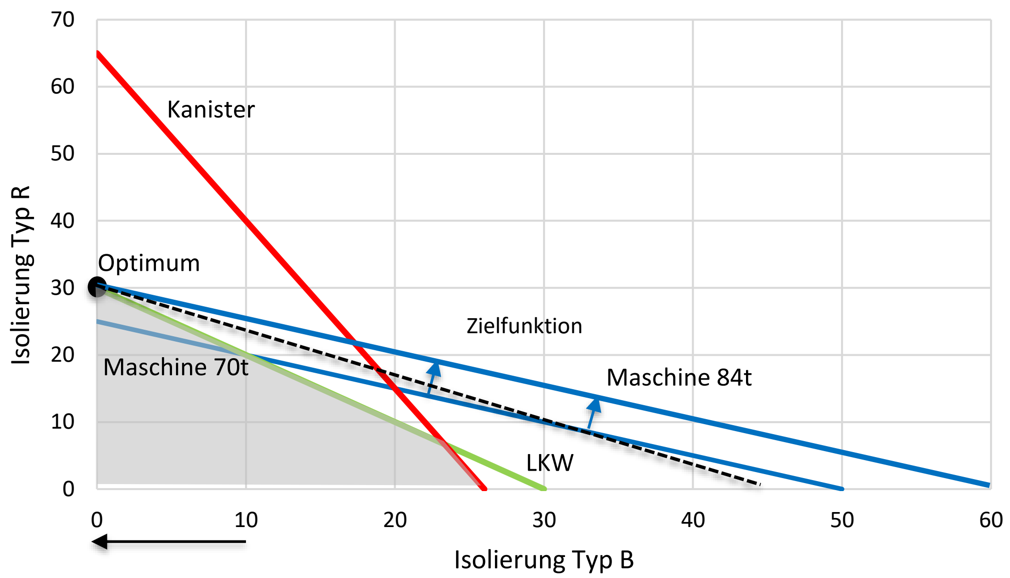
Die optimale Lösung (10;20) liegt nicht auf der Kanister-Nebenbedingung. Das heißt, dass in der optimalen Lösung weniger als 65 Kanister benötigt werden und somit eine Erhöhung der Kanister keine Rolle spielt. Somit bleibt die Menge von Typ B gleich.



iii)

Die beschränkende Nebenbedingung der Maschinenkapazität wird nach oben verschoben, dadurch lässt sich auch die Zielfunktion weiter nach außen verschieben. Der Punkt des optimalen Produktionsprogramms wandert daher von (10;20) zu (0;30). Die optimale Menge von Typ B fällt von 10 Mengeneinheiten auf 0 Mengeneinheiten.

Hinweis: Der Zielfunktionswert wird steigen.



Aufgabe 3.2 – LP Schränke

a) Es stehen 4000 Schrauben zur Verfügung, von denen aber nicht alle verbraucht werden müssen. Jeder Schrank, egal welchen Typs, benötigt 20 Schrauben. Aus dem Diagramm kann abgelesen werden, dass maximal 200 Schränke hergestellt werden können.

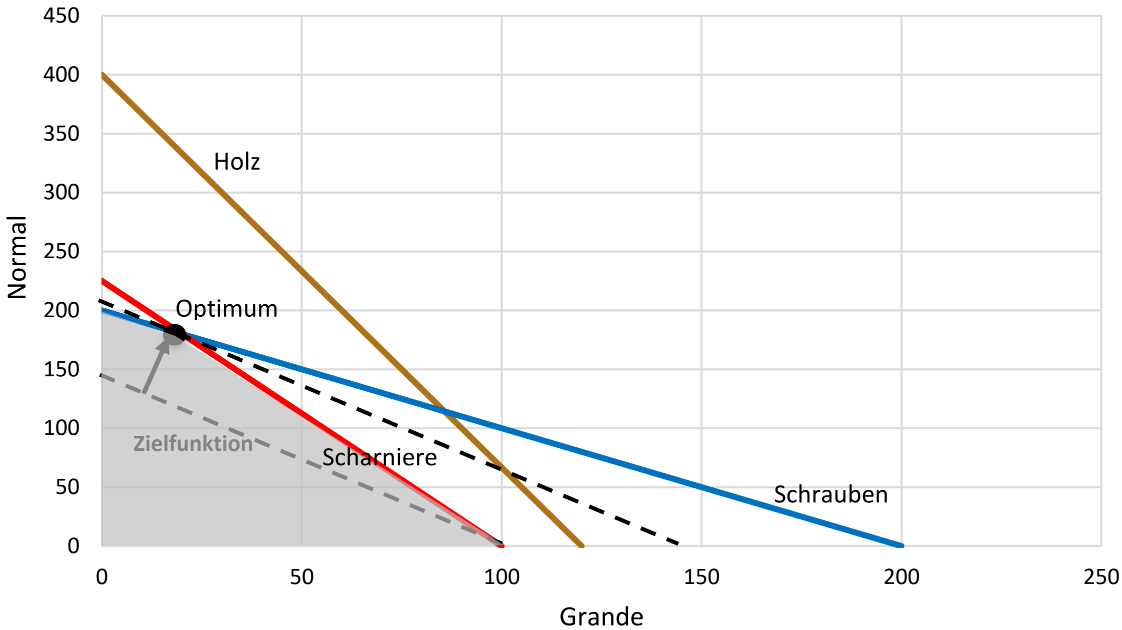
$$\text{Anzahl Schrauben} = 200 \cdot 20 = 4000$$

b) **Zielfunktion**
$\max \text{db} = 15\, X_G + 10\, X_N$

Kapazitätsrestriktionen
$20\, X_G + 6\, X_N \leq 2400$
$20\, X_G + 20 X_N \leq 4000$
$9\, X_G + 4\, X_N \leq 900$

Nichtnegativitätsbedingungen
$X_G, X_N \geq 0$

c)



Das Optimum befindet sich bei einem Produktionsprogramm von 180 Schränken des Typs „Normal“ & 20 Schränken des Typs „Grande“. Der Gewinn ergibt sich somit wie folgt:

$\mathrm{db} = 15 \cdot 20 + 10 \cdot 180 = 2100€$

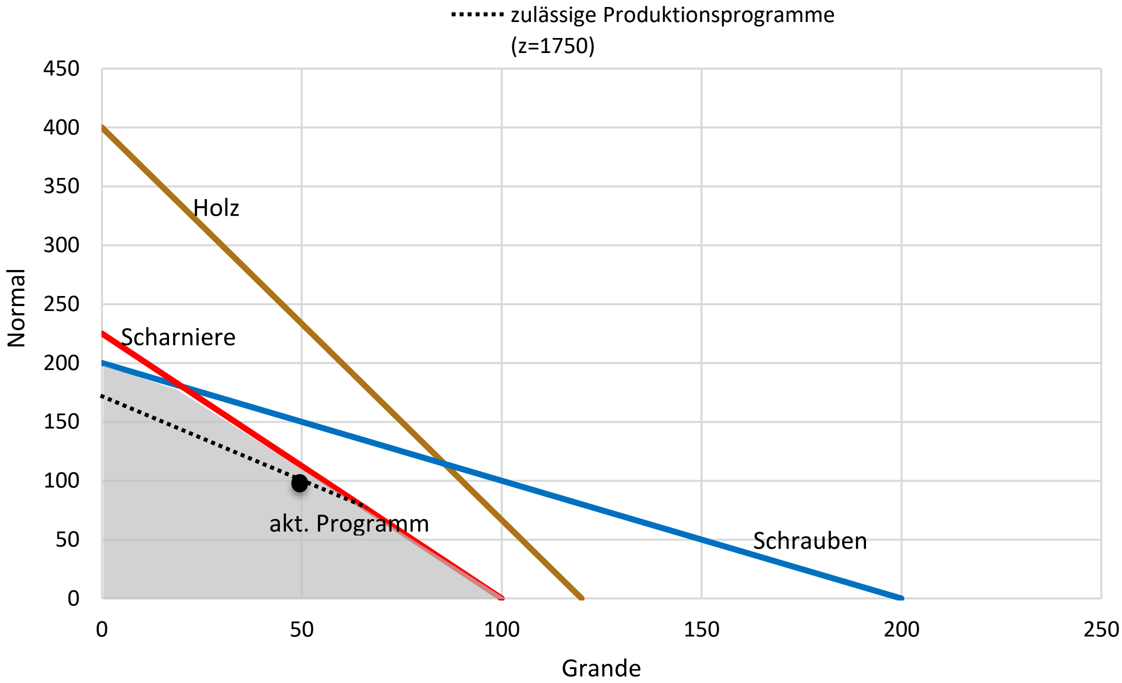
d) Durch Parallelverschiebung der Zielfunktion in das aktuelle Produktionsprogramm muss eine Gerade (im Diagramm schwarz, gepunktet) eingezeichnet werden. Alle Produktionsprogramme auf dieser Geraden liefern den gleichen Zielfunktionswert wie das aktuelle Programm (50 Grande; 100 Normal). Die Gerade darf jedoch nur innerhalb des zulässigen Bereichs eingezeichnet werden. Produktionsprogramme außerhalb des zulässigen Bereichs sind nicht realisierbar.

Bestimmung der Achsenschnittpunkte zum Einzeichnen durch Verwendung der Zielfunktion:

Gesamtdeckungsbeitrag: db = $100 \cdot 10 + 50 \cdot 15 = 1750€$

Schnittpunkt mit der Normal-Achse: (0; 175)

Schnittpunkt mit der Grande-Achse: (116,67; 0) aktuelles Programm: (50; 100)



e) Der Gesamtdeckungsbeitrag des optimalen Produktionsprogrammplans ist größer als der aktuell erzielte Gesamtdeckungsbeitrag, denn der aktuelle Produktionsplan liegt nicht auf dem Rand des zulässigen Bereichs. Somit lässt sich die Zielfunktion weiter nach außen verschieben und damit ein höherer Zielfunktionswert bzw. Gesamtdeckungsbeitrag mit der optimalen Lösung auf dem Rand des zulässigen Bereichs erzielen.

f) Hier muss das Gesetz von Little mit der Kingman-Abschätzung gleichgesetzt werden. Dies ist möglich, da die Durchlaufzeit (Gesetz von Little) der Summe von $E(W_q)$ und $E(T_S)$ entspricht. Anschließend wird nach der gesuchten Größe umgeformt.

$$\mathrm{L} = \frac{144 \text{ Schrauben}}{20 \ \frac{\text{Schrauben}}{\text{Schrank}}} = 7{,}2 \text{ Schränke}$$

$$\rho = \frac{4 \text{ min}}{5 \text{ min}} = 0{,}8$$

$c_a = 0,$ da $\sigma(T_a) = 0$ („genau alle 5 min")

$$\lambda = \text{Durchsatz} = \frac{1}{5\text{min}} = 0{,}2\frac{1}{\text{min}}$$

$$\frac{\mathrm{L}}{\lambda} = \mathrm{E(W)} = \frac{c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \mathrm{E}(\mathrm{T_s}) + \mathrm{E}(\mathrm{T_s})$$

$$c_s = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{L}{\lambda} - E(T_s)\right) \cdot \frac{1-\rho}{\rho \cdot E(T_s)}} = 2$$

$$\sigma(T_s) = c_s \cdot E(T_s) = 2 \cdot 4\,\text{min} = 8\,\text{min}$$

Aufgabe 3.3 – Privatbrauerei

a) Fragen zum Julia Code

i. Es liegt das Modell zur aggregierten Planung vor. Dies ist daran zu erkennen, dass ein Optimierungsproblem bezüglich der zu produzierenden Menge zweier (allgemein mehrerer) Güter über einen Planungshorizont von 5, also mehreren Perioden, vorliegt.

ii. Nein es wird kein Bier dazugekauft, da der maximale Fremdbezug auf null gesetzt worden ist. Fremdbezug wird jedoch als Nebenbedingung im Code berücksichtigt und tritt in anderen Problemen der aggregierten Planung auf.

iii. Es gibt zwei Produktionsstufen. Abzulesen ist dies im Code in dem Bereich „Mengen“. Die Ressourcen sind die Produktionsstufen. Es ist erkennbar, dass es nur zwei Stufen gibt; das Herstellen und Abfüllen.

iv. In dem Code-Abschnitt der Parameter gibt es den Parameter I_start. Dieser gibt den Anfangsbestand eines jeden Produktes an. Wenn jetzt beispielsweise noch 10 Einheiten vom hellen Bier am Sonntag im Lager wären, würde die Zeile wie folgt aussehen:

I_start = [10, 0]

b)

i. Die abgesetzte Menge liegt sogar immer unter der nachgefragten Menge, die Nachfrage wird also nie komplett befriedigt. Diese Informationen können der Tabelle über die Nachfrage und dem Output zur abgesetzten Menge entnommen werden. Vergleiche dazu beispielsweise $A_{Hell,Montag} = 35 < 70 = d_{Hell,Montag}$. Im Gegensatz zum Modell in der Vorlesung wurden die Absatzuntergrenzen nicht gleich der Nachfrage gewählt.

ii. Die Produktionsmenge von Dunkel am Mittwoch lässt sich durch die Lagerbilanz berechnen.

$$L_{i,t-1} + X_{i,t} + F_{i,t} - A_{i,t} = L_{i,t}$$

$$X_{Dunkel,Mi} = L_{Dunkel,Mi} + A_{Dunkel,Mi} - L_{Dunkel,Di} - F_{Dunkel,Mi}$$

$$X_{Dunkel,Mi} = 6 + 20 - 0 - 0 = 26$$

iii. Summe der produzierten Mengen multipliziert mit den variablen Produktionskosten:

Hell: $\sum_{t=1}^{5} X_{Hell,t} \cdot k_{Hell}^{v} = (35 + 35 + 30 + 30 + 30) \cdot 1 = 160$

Dunkel: $\sum_{t=1}^{5} X_{Dunkel,t} \cdot k_{Dunkel}^{v} = (22 + 22 + 26 + 26 + 28) \cdot 1.25 = 155$

iv. Der Lagerbestand von Dunkel am Donnerstag berechnet sich auch mit der Lagerbilanz:

$$X_{Dunkel,Do} - A_{Dunkel,Do} + L_{Dunkel,Mi} + F_{Dunkel,Do} = L_{Dunkel,Do}$$
$$26 - 20 + 6 + 0 = 12$$

v. Da es Perioden mit einem positiven Lagerbestand gibt, produziert die Brauerei nicht „on demand". Beispielsweise ist der Lagerbestand von Dunkel am Donnerstag
$$L_{Dunkel,Do} = 12$$

vi. Mittwoch werden 6 Einheiten und Donnerstag 12 Einheiten Dunkel gelagert.

Die Lagerkosten ergeben sich als Produkt von Lagermenge und Lagerkosten:
$$\sum_{t=1}^{5} L_{Dunkel,t} \cdot k^{l}_{Dunkel} = (6 + 12) \cdot 0{,}5 = 9$$

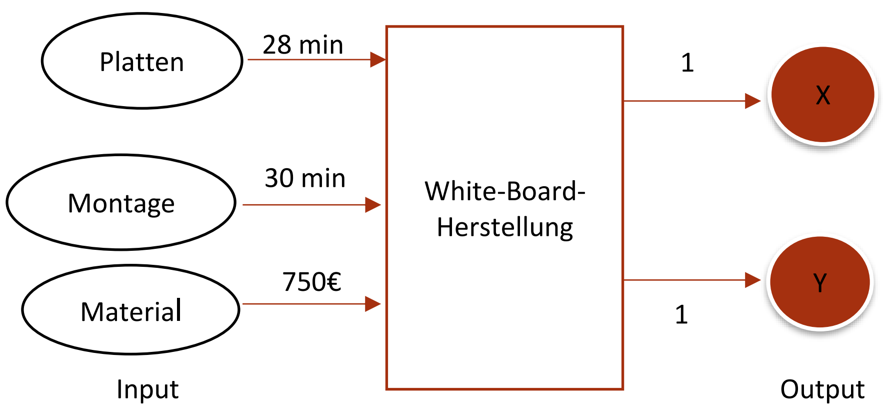
vii. Die Kosten für Überstunden berechnen sich als das Produkt aus Überstunden bezüglich der Ressourcen und dem entsprechenden Kostensatz für Überstunden. Es gibt nur Überstunden auf der Ressource „Herstellen".
$$\sum_{t=1}^{5} Z_{Herstellen,t} \cdot k^{z}_{Herstellen} = 30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$$

viii. Entsprechend der obigen Formel:
$$db = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\left(e_i A_{i,t} - k^{v}_{i} X_{i,t} - k^{f}_{i} F_{i,t} - k^{l}_{i} L_{i,t}\right) - \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{J} k^{z}_{j} Z_{j,t}$$
$$= \big((35 + 35 + 30 + 30 + 30) \cdot 3 - 160\big)$$
$$+\big((22 + 22 + 20 + 20 + 40) \cdot 3{,}5 - 155 - 9\big) - 7{,}5 = 582{,}5$$

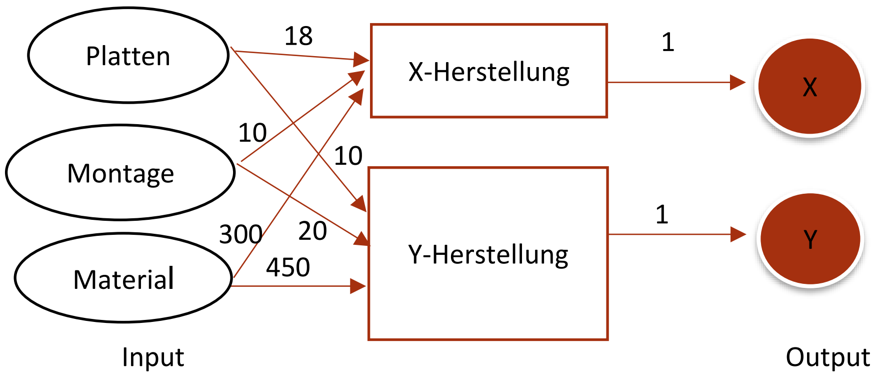
Der bei diesem Problem maximal erzielbare Gewinn beträgt 582,5 GE.

Aufgabe 3.4 – Whiteboard

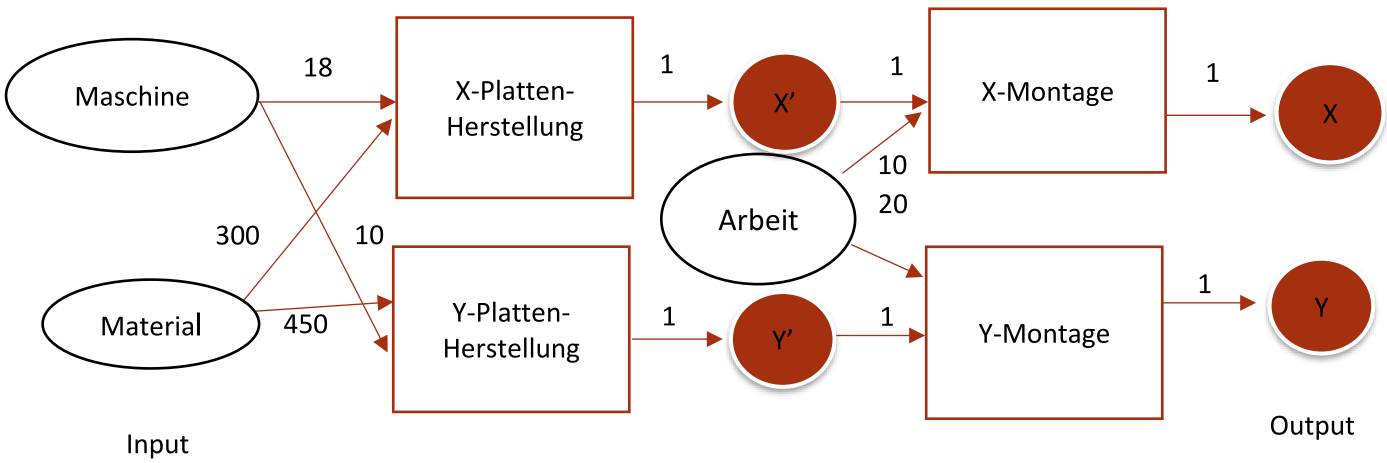
a) Black-Box-Modell:



Grey-Box-Modell:



White-Box-Modell:



Zielfunktion:

$$\max \mathrm{db} = (400 - 300)\, X_1 + (600 - 450)\, X_2 = 100\, X_1 + 150\, X_2$$

Kapazitätsrestriktion:

I. $18\, X_1 + 10\, X_2 \leq 216000$

II. $10\, X_1 + 20\, X_2 \leq 224000$

Absatzobergrenzen:

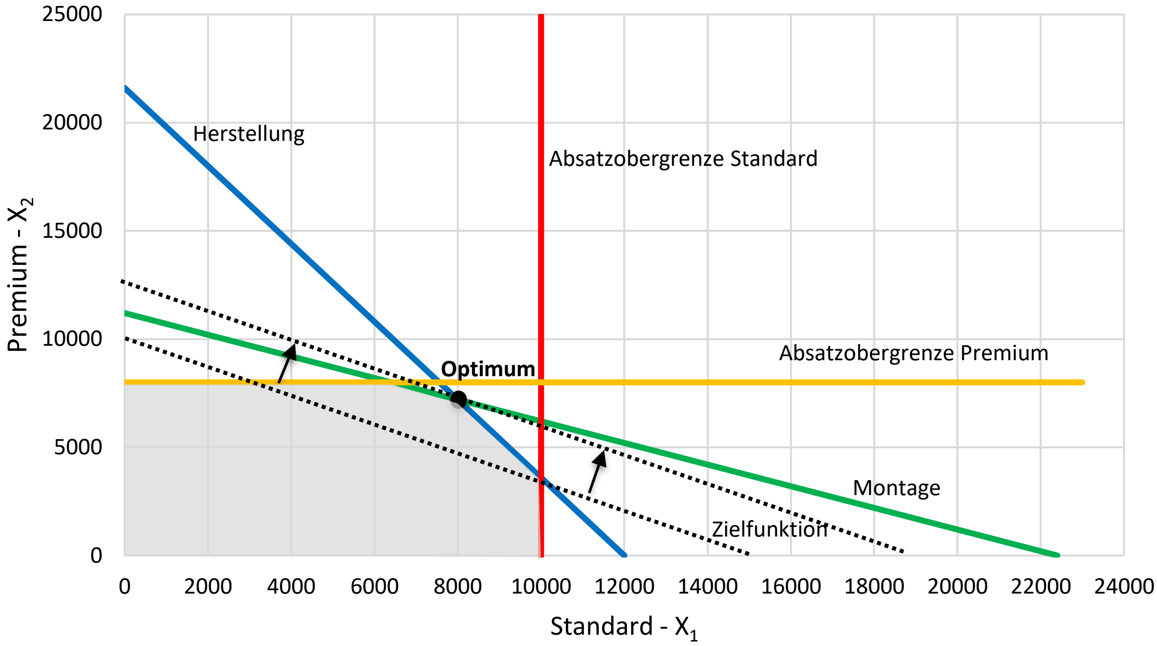
III. $X_1 \leq 10000$

IV. $X_2 \leq 8000$

Definitionsbereich:

$X_1, X_2 \geq 0$

b)



Optimale Lösung:

$X_1{}^* = 8000$

$X_2{}^* = 7200$

$\Rightarrow$ maximaler Gewinnbeitrag: $100 \cdot 8000 + 150 \cdot 7200 = 1880000$

(rechnerische Bestimmung der optimalen Werte siehe Übungsfolien)

c)

$$\text{Auslastung } \rho = \frac{\text{Ressource genutzt}}{\text{Ressource verfügbar}} = \frac{\text{Durchsatz}}{\text{Kapazität}}$$

Achtung: Der Durchsatz und die Kapazität haben hier die Einheit$[\frac{\text{ZE}}{\text{Periode}}]$. Es geht um die zeitliche Belegung der Maschine. X_1 und X_2 benötigen verschieden viel Zeit pro produzierter Mengeneinheit. Die Vereinheitlichung erfolgt durch Berechnung der benötigten Zeit pro Periode.

Tafelplattenherstellung:

$$\text{Durchsatz} = 18\frac{\text{ZE}}{\text{ME}} \cdot \frac{8000 \text{ ME}}{\text{Periode}} + \frac{10 \text{ ZE}}{\text{ME}} \cdot \frac{7200 \text{ ME}}{\text{Periode}} = \frac{216000 \text{ ZE}}{\text{Periode}}$$

$$\text{Kapazität} = \frac{216000 \text{ ZE}}{\text{Periode}}$$

$$\Rightarrow \text{Auslastung } \rho_1 = \frac{216000}{216000} = 100\ \%$$

Montage:

$\text{Durchsatz} = 10 \cdot 8000 + 20 \cdot 7200 = 224000$

$\text{Kapazität} = 224000$

$\Rightarrow \text{Auslastung } \rho_1 = \dfrac{224000}{224000} = 100\ \%$

Die Geraden dieser beiden Nebenbedingungen schneiden sich in der optimalen Lösung. Auch daran kann erkannt werden, dass die Ressourcen voll ausgelastet sind, da die Geraden gerade die Ressourcengrenzen (maximale Verfügbarkeit) darstellen.

Aufgabe 3.5 – Fahrzeughersteller

a) Die **Zielfunktion** ergibt sich aus den jeweiligen Deckungsbeiträgen:

$\max \text{db} = 4000 \cdot X_1 + 6000 \cdot X_2$

Die **Nebenbedingungen** lassen sich aus dem Text ableiten:

Vorfertigung: $X_1 + X_2 \leq 1000$
(1.Nebenbedingung)

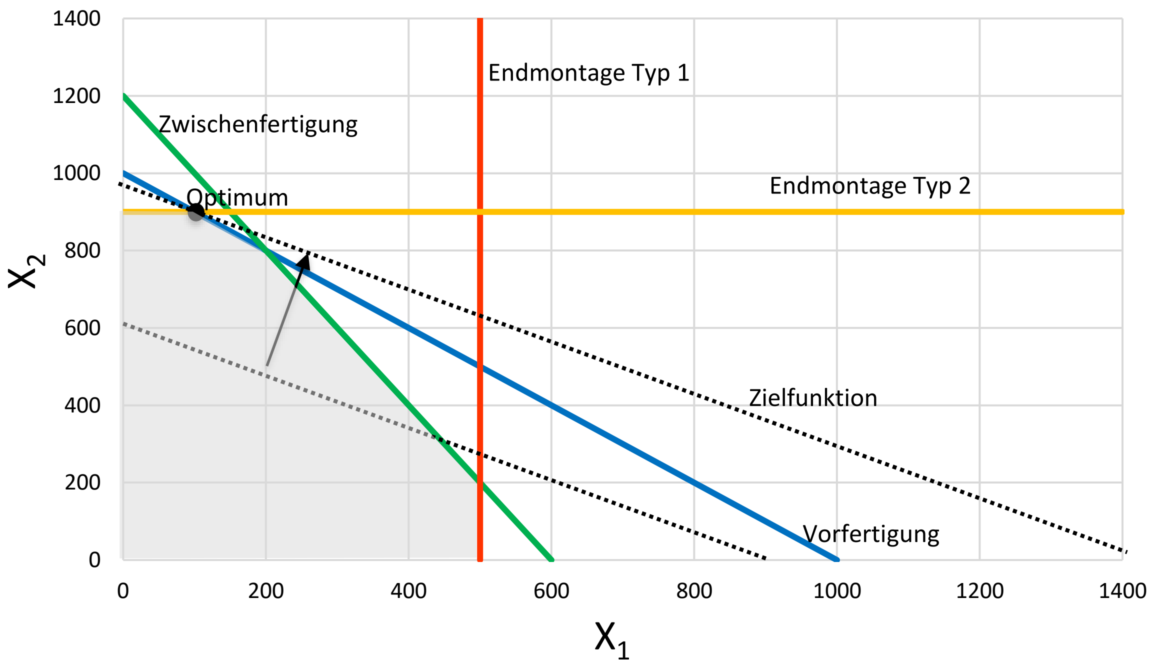
Zwischenfertigung: $2 \cdot X_1 + X_2 \leq 1200$
(2.Nebenbedingung)

Endmontage Fahrzeugtyp 1: $X_1 \leq 500$
(3.Nebenbedingung)

Endmontage Fahrzeugtyp 2: $X_2 \leq 900$
(4.Nebenbedingung)

Nichtnegativitätsbedingung: $X_1, X_2 \geq 0$

b)



→ $X_1^* = 100$ und $X_2^* = 900$, liefern $db = 4000 \cdot 100 + 6000 \cdot 900 = 5{,}800{,}000$ €

Aufgabe 3.6 – Beispiel 1 Taschen mit Änderung, Julia

Zusätzliche Nebenbedingung:

$5 \cdot \text{Premium} + 10 \cdot \text{Deluxe} \leq 21000$

Rot gekennzeichnet sind die Änderungen zum ursprünglichen Programmcode, Änderungen müssen nur im Dateneingabebereich vorgenommen werden:

```
#Mengen
Produkte =   ["Pemium", "DeLuxe"];
Ressourcen = ["Lederzuschnitt", "Verarbeitung", "Versand"];

#Längen
I = length(Produkte);
J = length(Ressourcen);
```

Fügen Sie die Parameter ein.

```
e  = [300,550];          # Erlös von Produkt i
kv = [100,150];          # variable Herstellkosten
d  = [3500,1500];        # Nachfrage nach Produkt i
c = [40000,40000,21000];      # Kapazität von Ressource j

      #Lederzuschnitt, Verarbeitung, Versand
r  = [       12                6           5      #Premium
              8               20          10 ];   #DeLuxe

#Produktionskoeffizient von Produkt i bezüglich Ressource j
```

a)

Lösen ⇒ Gewinnbeitrag: 840000 [GE]

Produktionsmenge Premium X_1^* = 1200 [ME]

Produktionsmenge DeLuxe X_2^* = 1500 [ME]

Stufe I:

$\text{Durchsatz} = 12 \cdot X_1^* + 8 \cdot X_2^* = 26400$

$\text{Kapazität} = 40000$

$\Rightarrow \text{Auslastung } \rho_1 = \frac{26400}{40000} \approx 66\,\%$

Stufe II:

$\text{Durchsatz} = 6 \cdot X_1^* + 20 \cdot X_2^* = 37200$

$\text{Kapazität} = 40000$

$\Rightarrow \text{Auslastung } \rho_2 = \frac{37200}{40000} \approx 93\,\%$

Stufe III:

$\text{Durchsatz} = 5 \cdot X_1^* + 10 \cdot X_2^* = 21000$

$\text{Kapazität} = 21000$

$\Rightarrow$ Auslastung $\rho_3 = \frac{21000}{21000} = 100\ \%$

Da die Stufe III als einzige Stufe eine Auslastung von 100% hat, wirkt Stufe III als Engpass (bottleneck). Der Engpass bestimmt die Leistung der gesamten Produktionskette. Um den maximal erzielbaren Gewinnbeitrag zu steigern, sollte also in die Kapazität der Stufe III investiert werden.

b)

$X'_1 = 2900$

$X'_2 = 650$

Dies ergibt ebenfalls einen optimalen Gewinnbeitrag in Höhe von 840000 [GE], da

$2900 \cdot 200 + 650 \cdot 400 = 840000.$

Stufe I:

$\text{Durchsatz} = 12 \cdot X'_1 + 8 \cdot X'_2 = 40000$

$\text{Kapazität} = 40000$

$\Rightarrow$ Auslastung $\rho_1 = \frac{40000}{40000} = 100\ \%$

Stufe II:

$\text{Durchsatz} = 6 \cdot X'_1 + 20 \cdot X'_2 = 30400$

$\text{Kapazität} = 40000$

$\Rightarrow$ Auslastung $\rho_1 = \frac{30400}{40000} \approx 76\ \%$

Stufe III:

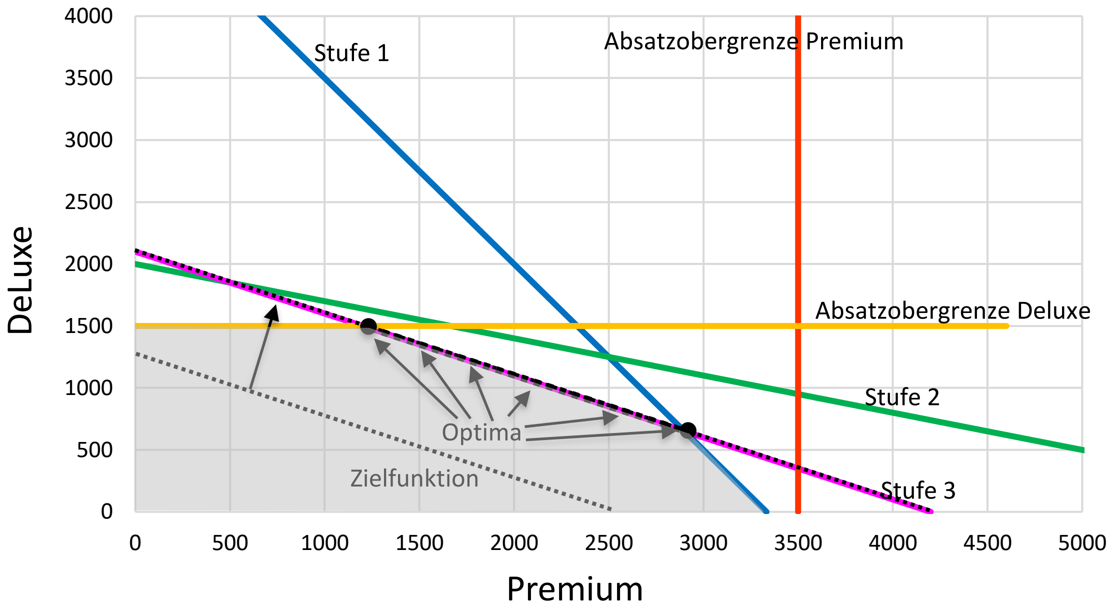
$\text{Durchsatz} = 5 \cdot X'_1 + 10 \cdot X'_2 = 21000$

$\text{Kapazität} = 21000$

$\Rightarrow$ Auslastung $\rho_1 = \frac{21000}{21000} = 100\ \%$

Der Gewinnbeitrag des vorgeschlagenen Produktionsprogramms ist identisch, nun ist jedoch auch Stufe I voll ausgelastet.

c)



Es existieren „unendlich“ viele optimale Lösungen (da die Maschinenauslastung nicht Bestandteil der Zielfunktion ist)! Die Zielfunktion ist parallel zur neu eingefügten Nebenbedingung. Beide Punkte, sowie alle Punkte auf der Verbindungslinie zwischen ihnen, sind optimal. Beide Punkte erfüllen alle Nebenbedingungen, sind also zulässig. In Julia wird immer nur eine einzige optimale Lösung ausgegeben.

Aufgabe 3.7 – Aggregierte Planung allgemein

a) **Entscheidungsvariablen:**

- (planmäßig) abgesetzte Menge von Produkt i in Periode t: A_{it}
- (planmäßig) bezogene Fremdbezugsmenge von Produkt i in Periode t: F_{it}
- (planmäßiger) Lagerbestand von Produkt i in Periode t: L_{it}
- (planmäßig) benötigte Zusatzkapazität von Ressource j in Periode t: Z_{jt}
- (planmäßig) produzierte Menge von Produkt i in Periode t: X_{it}

Zielfunktion:

Die Zielsetzung besteht in der Maximierung des Gewinns, was über die Maximierung der Differenz aus den Erlösen und Kosten (Lager-, Herstell-, Überstunden- und Fremdbezugskosten) erreicht wird.

Nebenbedingungen:

- Zusätzlich zur Normalkapazität c_{jt} der Produktionsressource j in Periode t kann Zusatzkapazität z_{jt} eingesetzt werden. Der Ressourcenverbrauch darf die Summe aus Normalkapazität und eingesetzter Zusatzkapazität nicht überschreiten.
- Die planmäßig abgesetzte Menge A_{it} von Produkt i in Periode t darf die Nachfrage d_{it} nicht überschreiten.
- Die planmäßig abgesetzte Menge A_{it} von Produkt i in Periode t darf die Absatzuntergrenze d_{it}^{min} nicht unterschreiten.
- Die eingeplanten Zusatzkapazitäten Z_{jt} dürfen eine Obergrenze z_j^{max} nicht überschreiten.
- Die eingeplanten Fremdbezugsmengen F_{it} dürfen eine Obergrenze $f_{i,t}^{max}$ nicht überschreiten.
- Die Produkte können über die Periodengrenzen hinaus gelagert werden. Der Lagerbestand L_{it} am Ende einer Periode lässt sich aus dem Lagerbestand am Ende der jeweiligen Vorperiode L_{it-1}, zuzüglich der Produktionsmenge X_{it} und der Fremdbezugsmenge F_{it}, abzüglich der Absatzmenge A_{it} ermitteln.
- Der Lagerbestand am Anfang der ersten Periode L_{i0} muss mit l_i festgesetzt werden.

Alle Entscheidungsvariablen dürfen keine negativen Werte annehmen.

b)

i.

$$L_{i,t} \geq l_i^{min} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots I, t = 1 \ldots T$$

ii.

$$L_{i,t} \leq l_i^{max} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots I, t = 1 \ldots T$$

iii.

$$\sum_{i=1}^{I} b_i \cdot L_{i,t} \leq l^{max} \qquad \text{für alle } t = 1 \ldots T$$

Aufgabe 3.8 – Aggregierte Planung Flexibilitätsinstrumente

a. Lagerung: 0,5 Euro
Überstunden: 20 Euro * (0,5 h + 0,1 h) = 12 Euro
Fremdbezug: 30 Euro – 15 Euro = 15 Euro

b.

Aggregierte Planung	**CLSP**
Ziel: deckungsbeitragsmaximierender Produktionsplan	Ziel: kostenminimaler Produktionsplan
Mehrere Produktionsressourcen möglich	Eine Produktionsressource
Produktion innerhalb minimaler und maximaler Absatzgrenzen	Fehlmengen sind nicht erlaubt
Das Rüsten wird nicht beachtet	Rüsten (Zeit und Kosten) wird beachtet und optimiert

Aufgabe 3.9 – Aggregierte Planung mit höherem Lagerkostensatz, Julia

Die Zeile im Julia Code zum Lagerkostensatz muss wie folgt angepasst werden:

```
kl = [100,150];      #Lagerkostensatz von Produkt i
```

Es ergibt sich ein Zielfunktionswert von 435820 [GE].

Der Zielfunktionswert ist geringer als zuvor, da höhere Kosten induziert werden. Bei höheren Kosten kann der Zielfunktionswert maximal gleichbleiben (z.B., wenn nicht gelagert wird).

Die Produktionsmengen, Lagerbestände und Zusatzkapazitäten können aus den Tabellen aus der Julia Lösung abgelesen werden.

Absatzmenge	Wo1	Wo2	Wo3	Wo4	Wo5	Wo6
Premium	150	300	200	50	100	450
DeLuxe	50	150	50	100	250	50

Produktionsmenge	Wo1	Wo2	Wo3	Wo4	Wo5	Wo6
Premium	231	219	201	110	206	283
DeLuxe	91	109	115	157	128	50

Lagerbestand	Wo1	Wo3	Wo4	Wo5
Premium	81	1	61	167
DeLuxe	41	65	122	0

Zusatzkapazität	Wo3	Wo4	Wo5	Wo6
Stufe 1	0	0	0	296
Stufe 2	6	300	296	0

Durch die gestiegenen Lagerkostensätze verringert sich der Gewinn. Das Zukaufen von Zusatzkapazität ermöglicht eine flexiblere Fertigung, um die Nachfrage (in Monaten mit höherer Nachfrage) zu erfüllen.

Aufgabe 3.10 – Aggregierte Planung mit Lagerhaltung und Fremdbezug I, Julia

Folgende Werte müssen eingefügt werden (vorher auf null begrenzt):

```
        #Wo1, Wo2, Wo3, Wo4, Wo5, Wo6
fmax = [1000 1000 1000 1000 1000 1000   #Premium
         1000 1000 1000 1000 1000 1000]; #DeLuxe
```

Gewinnbeitrag: 505810 [GE]

Der Gewinnbeitrag ist höher als zuvor. Die Kapazitätsbeschränkung des Fremdbezugs wurde gelockert, als Folge kann der Gewinn sich nur steigern oder gleichbleiben.

Absatzmenge	Wo1	Wo2	Wo3	Wo4	Wo5	Wo6
Premium	150	300	200	50	100	450
DeLuxe	50	150	50	100	250	50

Produktionsmenge	Wo1	Wo2	Wo3	Wo4	Wo5	Wo6
Premium	150	219	200	50	100	258
DeLuxe	50	109	50	100	145	50

Fremdbezugsmenge	Wo2	Wo5	Wo6
Premium	81	0	192
DeLuxe	41	105	0

Der Lagerbestand und die Zusatzkapazität sind in jeder Woche für alle Produkte null.

Die Firma bezieht nun zusätzliche Produkte von anderen Herstellern (Outsourcing). Die eigene produzierte Menge reduziert sich. Es wird weder gelagert noch zusätzliche Kapazität abgefragt.

Aufgabe 3.11 – Aggregierte Planung mit Lagerhaltung und Fremdbezug II, Julia

Folgende Werte müssen eingefügt werden:

```
        #Wo1, Wo2, Wo3, Wo4, Wo5, Wo6
fmax = [50    30    40    10    10    35    #Premium
         60    20    100   10    30     0]; #DeLuxe
```

Gewinnbeitrag: 503560 [GE]

Die Einschränkung der Fremdbezugsmenge führt zu einem geringeren Gewinn als wenn größere Mengen erlaubt sind. Im Vergleich zur Teilaufgabe ohne Fremdbezug erhöht sich der Gewinn jedoch.

Absatzmenge	Wo1	Wo2	Wo3	Wo4	Wo5	Wo6
Premium	150	300	200	50	100	450

DeLuxe	50	150	50	100	250	50

Produktionsmenge	Wo1	Wo2	Wo3	Wo4	Wo5	Wo6
Premium	201	219	200	78	219	258
DeLuxe	71	109	100	151	109	50

Lagerbestand	Wo1	Wo3	Wo4	Wo5
Premium	51	0	28	157
DeLuxe	21	50	111	0

Fremdbezug	Wo2	Wo4	Wo5	Wo6
Premium	30	0	10	35
DeLuxe	20	10	30	0

Die Zusatzkapazität ist immer null. Es wird also keine genutzt.

Im Vergleich zur größeren Fremdbezugsmenge wird wieder mehr selbst produziert. Es werden auch wieder Produkte vorproduziert und eingelagert. Es wird immer noch keine zusätzliche Kapazität eingekauft.

Die Änderungen entsprechen auch der Kostenstruktur der Aufgabe:

Kosten einer produzierten Einheit: 100 bzw. 150

Kosten einer produzierten und eingelagerten Einheit (1 Periode): 110 bzw. 165

Kosten einer zusätzlich produzierten Einheit: siehe oben + jeweils $10 \cdot Z(j,t)$

Kosten einer fremdproduzierten Einheit: 110 bzw. 160

Das heißt im Optimum (wenn es die Beschränkung der Fremdbezugsmenge zulässt) wird in Perioden mit geringer Nachfrage alles selbst produziert, in Perioden mit höherer Nachfrage wird der Rest dazu gekauft. Wenn die maximale Fremdbezugsmenge überschritten würde, dann wird zusätzlich vorproduziert und gelagert. Wenn gar kein Fremdbezug zulässig ist, tritt eine Kombination aus Lagerung und Fremdbezug auf.

Thema 4 – Losgrößenplanung (bei statischer Nachfrage)

Aufgabe 4.1 – Rahmspinat

a)

Aufgrund des direkten Tradeoffs zwischen zu wenig und zu viel bestellter Menge frischen Spinats am Morgen, ist das Zeitungsjungen-Modell zu verwenden. Da, falls am Morgen ein kg zu wenig bestellt wird, der Spinat für 3€ anstatt 1€ (bei einer Bestellung am Morgen) nachbestellt werden muss, ergeben sich die Fehlmengenkosten folgendermaßen:

$$c_u = 3€ - 1€ = 2€$$

Die Überbestandskosten entsprechen dem Einkaufspreis des Spinats am Morgen:

$$c_o = 1€$$

Das gewinnmaximierende Servicelevel, welches die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass die am Morgen bestellte Menge frischen Spinats ausreicht, um den Babybrei zu produzieren, entspricht beim Zeitungsjungenmodell dem kritischen Verhältnis. Somit ergibt sich der prozentuale Anteil der Tage, an dem der Hersteller keinen Spinat nachbestellen muss, wie folgt:

$$\text{Servicelevel} = \text{krit. Verhältnis} = \frac{2€}{2€ + 1€} = \frac{2}{3} = 66{,}67\%$$

b)

Gesucht ist das kleinste Q für das gilt:

$$P(D \leq Q) \geq 0{,}6667$$

Standardisieren liefert:

$$P\left(Z \leq \frac{Q - d}{\sigma}\right) = P(Z \leq z^*) \geq 0{,}6667$$

Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung folgt:

$$z^* = 0{,}44$$

Durch Umstellen der Formel für die Standardisierung erhalten wir:

$$Q^* = d + z^* \cdot \sigma = 65 + 0{,}44 \cdot 10 = 69{,}4 \text{ kg}$$

Aufgabe 4.2 – Brötchenverkauf

a)

Nachfrage d	100	130	140
P(D=d)	0,3	0,4	0,3
P(D≤d)	0,3	0,7	1,0

Es liegt ein einperiodiges Problem mit zufälliger Nachfrage vor. Es kann mithilfe des Zeitungsjungenmodells gelöst werden kann. Dazu sollen zunächst die Wahrscheinlichkeiten und die kumulierten Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Es liegen insgesamt zehn beobachtete Nachfragen vor, die Häufigkeit einer nachgefragten Menge geteilt durch die gesamte Anzahl aller nachgefragten Mengen gibt Aufschluss über die Wahrscheinlichkeit einer nachgefragten Menge. Der Verkaufspreis eines Brötchens beträgt

$$p^{sales} = 1{,}40€.$$

Die Kosten eines Brötchens betragen

$$k^v = 0{,}25€ + 0{,}1€ = 0{,}35€.$$

Als nächstes müssen Überbestands- und Unterbestandskosten ermittelt werden. Die Unterbestandskosten c_u, also die Kosten für eine weitere Einheit, die nachgefragt aber nicht vorrätig war, ergeben sich als Differenz aus Verkaufspreis und Kosten also $p^{sales} - k^v$. Die Überbestandskosten c_o sind die Kosten, die entstehen, wenn eine Einheit zu viel vorrätig war und nicht verkauft werden konnte. Folglich sind die Überbestandskosten die Kosten eines Brötchens k^v. Das kritische Verhältnis ist definiert als Unterbestandskosten geteilt durch die Summe aus Unterbestands- und Überbestandskosten.

$$\text{krit. Verhältnis} = \frac{\mathrm{c_u}}{\mathrm{c_o} + \mathrm{c_u}} = \frac{p^{sales} - k^v}{p^{sales} - k^v + k^v} = \frac{p^{sales} - k^v}{p^{sales}} = \frac{1{,}4€ - 0{,}35€}{1{,}4€} = 0{,}75$$

Gesucht ist die kleinste Menge Q^* mit $\mathrm{P(D \leq Q)} \geq \frac{\mathrm{c_u}}{\mathrm{c_o}+\mathrm{c_u}} = \frac{p^{sales}-k^v}{p^{sales}}$

$$\mathrm{P(D \leq 130)} = 0{,}7$$

$$\mathrm{P(D \leq 140)} = 1{,}0 \rightarrow \mathrm{Q}^* = 140$$

Ist die optimale Menge an Brötchen, die geschmiert werden sollten.

b)

Nachfrage d	80	100	130	140	160
P(D=d)	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1
P(D≤d)	0,1	0,2	0,8	0,9	1,0

$$p^{sales} = 1{,}40€$$

$$k^v = 0{,}25€ + 0{,}1€ = 0{,}35€$$

$$\frac{p^{sales} - k^v}{p^{sales}} = \frac{1{,}4€ - 0{,}35€}{1{,}4€} = 0{,}75$$

$$\mathrm{P(D \leq 100)} = 0{,}2$$

$$\mathrm{P(D \leq 130)} = 0{,}8 \rightarrow \mathrm{Q}^* = 130$$

Aufgabe 4.3 – Gummistiefel

a)

Da durchschnittlich 25% des Lagers gefüllt sind und das Lager eine maximale Kapazität von 400 ME aufweist, berechnet sich der mittlere Bestand wie folgt:

$$\text{Durchschnittlicher Bestand} = \mathrm{L} = 0{,}25 \cdot 400\ \mathrm{ME} = 100\ \mathrm{ME}$$

Da die angelieferten Gummistiefel nur durch einen Verkauf das Lager verlassen, entspricht der Durchsatz der Nachfrage. Somit lässt sich die Nachfrage durch das umgestellte Gesetz von Little berechnen.

$$\text{Nachfrage} = \text{Durchsatz} = \lambda = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{W}} = \frac{100\ \mathrm{ME}}{20\ \mathrm{Tag}} = 5\ \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Tag}}$$

b)

Aufgrund der Mehrperiodigkeit und der konstanten Nachfrage muss zur Berechnung das EOQ-Modell verwendet werden. Im EOQ-Modell entspricht der mittlere Bestand der Hälfte der Bestellmenge. Damit folgt für die Bestellmenge:

$$\text{Durchschnittlicher Bestand} = \frac{Q^*}{2}$$

$$\leftrightarrow Q^* = 2 \cdot \text{Durchschnittlicher Bestand} = 2 \cdot 100 \text{ ME} = 200 \text{ ME}$$

c)

Bei einer Bestellmenge von 200 ME und einer Nachfrage von 5 Mengeneinheiten pro Tag folgt für die Länge des Bestellzyklus:

$$\frac{Q^*}{d} = \frac{200 \text{ ME}}{5 \ \frac{\text{ME}}{\text{Tag}}} = 40 \text{ Tage}$$

d)

Für die optimale Bestellmenge entsprechen im EOQ-Modell die Lagerkosten den Bestellkosten: $K^{l,total}(Q^*) = K^{s,total}(Q^*)$. Somit ergeben sich die Gesamtkosten wie folgt:

$$K^{total}(Q) = K^{l,total}(Q^*) + K^{s,total}(Q^*) = 2 \cdot K^{l,total}(Q^*) = 2 \cdot k^l \cdot \frac{Q^*}{2} = k^l \cdot Q^*$$
$$= 0{,}15 \frac{€}{\text{Tag ME}} \cdot 200 \text{ ME} = 30 \frac{€}{\text{Tag}}$$

e) Die Optimale Bestellmenge steigt, Lagerkosten und Bestellkosten verändern sich jedoch nicht.

Für den neuen Bestellkostensatz (= Bestellkosten pro Bestellung) und Lagerkostensatz gilt:

$k^l_{neu} = \frac{1}{2} \cdot k^l_{alt}$ und $k^s_{neu} = 2 \cdot k^s_{alt}$

Damit folgt für die neue optimale Bestellmenge:

$$Q^*_{neu} = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s_{neu} \cdot d}{k^l_{neu}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(2 \cdot k^s_{alt}\right) \cdot d}{\frac{1}{2} \cdot k^l_{alt}}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2 \cdot k^s_{alt} \cdot d}{k^l_{alt}}} = \sqrt{4 \cdot \frac{2 \cdot k^s_{alt} \cdot d}{k^l_{alt}}}$$
$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k^s_{alt} \cdot d}{k^l_{alt}}} = 2 \cdot Q^*_{alt}$$

Die optimale Bestellmenge steigt dementsprechend um 100%. Für die Lager-/ bzw. Bestellkosten durch die neue Bestellmenge gilt:

$$K^{l,total}_{neu}(Q^*_{neu}) = k^l_{neu} \cdot \frac{Q^*_{neu}}{2} = \frac{1}{2} \cdot k^l_{alt} \cdot \frac{2 \cdot Q^*_{alt}}{2} = k^l_{alt} \cdot \frac{Q^*_{alt}}{2} = K^{l,total}_{alt}(Q^*_{alt})$$
$$K^{s,total}_{neu}(Q^*_{neu}) = k^s_{neu} \cdot \frac{d}{Q^*_{neu}} = 2 \cdot k^s_{alt} \cdot \frac{d}{2 \cdot Q^*_{alt}} = k^s_{alt} \cdot \frac{d}{Q^*_{alt}} = K^{s,total}_{alt}(Q^*_{alt})$$

Somit bleiben die Lagerkosten und die Bestellkosten unverändert, während sich die Bestellmenge verdoppelt!

f)

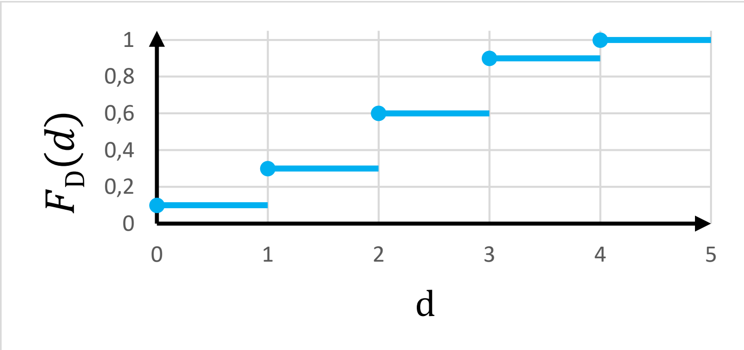
Da die Nachfrage nun nicht mehr konstant, sondern unsicher (bzw. normalverteilt) ist, muss das (s,Q)-Modell verwendet werden. Der Sicherheitsbestand berechnet sich demnach wie folgt: $\mathrm{SB} = z_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{l}$

Umstellen liefert dann z_α, mit dem wir das gesuchte Servicelevel der Tabelle der Standardnormalverteilung entnehmen können:

$$z_\alpha = \frac{\mathrm{SB}}{\sigma \cdot \sqrt{l}} = \frac{33}{10 \cdot \sqrt{4}} = 1{,}65 \rightarrow \text{Servicelevel} = F(z_\alpha) = 95{,}05\% \text{ bzw. } 95\%$$

Aufgabe 4.4 – Bio-Erdbeeren

a)



$$F_D(d) = \begin{cases} 0 & d < 0 \\ 0{,}1 & 0 \le d < 1 \\ 0{,}3 & 1 \le d < 2 \\ 0{,}6 & 2 \le d < 3 \\ 0{,}9 & 3 \le d < 4 \\ 1{,}0 & 4 \le d < 5 \end{cases}$$

b)

Unter der Annahme, dass die Bestellmenge $Q = 3$ beträgt, liegt die Wahrscheinlichkeit, dass keine Fehlmenge auftritt bei $F_D(3) = P(D \le 3) = 0{,}9$.

Eine Fehlmenge tritt dann auf, wenn die Nachfrage nicht befriedigt werden kann, hier also bei $d = 4$. Die Wahrscheinlichkeit hierfür liegt bei $1 - F_D(3) = 0{,}1$.

Fehlmenge f [ME]	$P(F = f)$
0	$P(D \le 3) = 0{,}9$
1	$P(D = 4) = 0{,}1$

Die erwartete Fehlmenge ist dann: $E(F) = 0\,\mathrm{ME} \cdot 0{,}9 + 1\,\mathrm{ME} \cdot 0{,}1 = 0{,}1\,\mathrm{ME}$.

Eine Restmenge entsteht, wenn weniger als $Q = 3$ ME nachgefragt werden.

Restmenge r [ME]	$P(R = r)$
0	$P(D = 3) + P(D = 4) = 0,3 + 0,1 = 0,4$
1	$P(D = 2) = 0,3$
2	$P(D = 1) = 0,2$
3	$P(D = 0) = 0,1$

Die erwartete Restmenge ist dann:

$E(R) = 0\text{ ME} \cdot 0,4 + 1\text{ ME} \cdot 0,3 + 2\text{ ME} \cdot 0,2 + 3\text{ ME} \cdot 0,1 = 1\text{ ME}.$

c)

Die Fehlmengenkosten berechnen sich zu $c_u = 2€ - 1,50€ = 0,50€$. Die Überbestandskosten betragen $c_o = 1,50€$.

Das kritische Verhältnis errechnet sich zu $\frac{c_u}{c_u + c_o} = \frac{0,5€}{0,5€ + 1,5€} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Die optimale Bestellmenge beträgt $Q^* = 1$ (siehe Verteilungsfunktion in a)).

d)

Ein $\alpha - \text{Servicegrad} = P(D \leq Q) \geq 0,6$ ist erfüllt bei $Q \geq 2\text{ ME}$ (siehe Verteilungsfunktion in 1 a)). Die Bestellmenge Q muss also mindestens 2 ME betragen.

e)

Bei $Q = 3$ ergeben sich das Service-Level $P(D \leq 3\text{ ME}) = 0,9$ und die Fill-Rate zu

$$\frac{E(\min\{D, 3\})}{E(D)} = \frac{2\text{ ME}}{2,1\text{ ME}} = 0,95$$

Der Erwartungswert an nachgefragten Schalen berechnet sich zu

$E(D) = 0\text{ ME} \cdot 0,1 + 1\text{ ME} \cdot 0,2 + 2\text{ ME} \cdot 0,3 + 3\text{ ME} \cdot 0,3 + 4\text{ ME} \cdot 0,1 = 2,1\text{ ME}.$

Der Erwartungswert an verkauften Schalen bei $q = 3\text{ME}$ beträgt dagegen nur

$E(\min\{D, q\}) = 0\text{ ME} \cdot 0,1 + 1\text{ ME} \cdot 0,2 + 2\text{ ME} \cdot 0,3 + 3\text{ ME} \cdot 0,3 + 3\text{ ME} \cdot 0,1 = 2\text{ ME}.$

Bei der gewinnmaximierenden Menge ergibt sich das Service-Level zu $P(D \leq 1) = 0,3$ und die Fill-Rate zu

$$\frac{E(\min\{D, 1\})}{E(D)} = \frac{0\text{ ME} \cdot 0,1 + 1\text{ ME} \cdot 0,2 + 1\text{ ME} \cdot 0,3 + 1\text{ ME} \cdot 0,3 + 1\text{ ME} \cdot 0,1}{2,1\text{ ME}} = \frac{0,9\text{ME}}{2,1\text{ME}}$$

$$= 0,43.$$

Aufgabe 4.5 – die Molkerei

a)

Nachfrage D [ME]	Häufigkeit a_j	$P(D = d) = \frac{a_j}{n}$	$P(D \leq d)$
200	4	0,1	0,1
250	8	0,2	0,3
300	12	0,3	0,6
350	10	0,25	0,85
400	6	0,15	1
$\sum$	n=40	1	

b)

Der α-Servicegrad beträgt $P(D \leq 250\text{ ME}) = 0{,}3$.

c)

Die gewinnmaximierende Bestellmenge beträgt $Q^* = 300\text{ME}$, da man für $c_u = 1{,}50€$ und $c_o = 1{,}00€$ ein kritisches Verhältnis von $\frac{c_u}{c_o+c_u} = \frac{1{,}50€}{1€+1{,}50€} = 0{,}6$ erhält und $P(D \leq 300) = 0{,}6$.

d)

Die Fill-Rate berechnet sich zu

$$\frac{E(\min\{D, 300\})}{E(D)}$$

$$= \frac{(200\text{ME} \cdot 0{,}1 + 250\text{ME} \cdot 0{,}2 + 300\text{ME} \cdot 0{,}3 + 300\text{ME} \cdot 0{,}25 + 300\text{ME} \cdot 0{,}15)}{(200\text{ME} \cdot 0{,}1 + 250\text{ME} \cdot 0{,}2 + 300\text{ME} \cdot 0{,}3 + 350\text{ME} \cdot 0{,}25 + 400\text{ME} \cdot 0{,}15)} = 0{,}91$$

e)

Kann die nicht verwendete Milch für 0,50€ weiterverkauft werden, so sinkt c_o auf 0,50€. Dies ergibt ein kritisches Verhältnis von $\frac{c_u}{c_o+c_u} = \frac{1{,}50€}{0{,}50€+1{,}50€} = 0{,}75$ und $P(D \leq 350) = 0{,}85$ liefert die neue optimale Bestellmenge $q^*_{neu} = 350$ ME.

Aufgabe 4.6 – Bestandsmanagement I

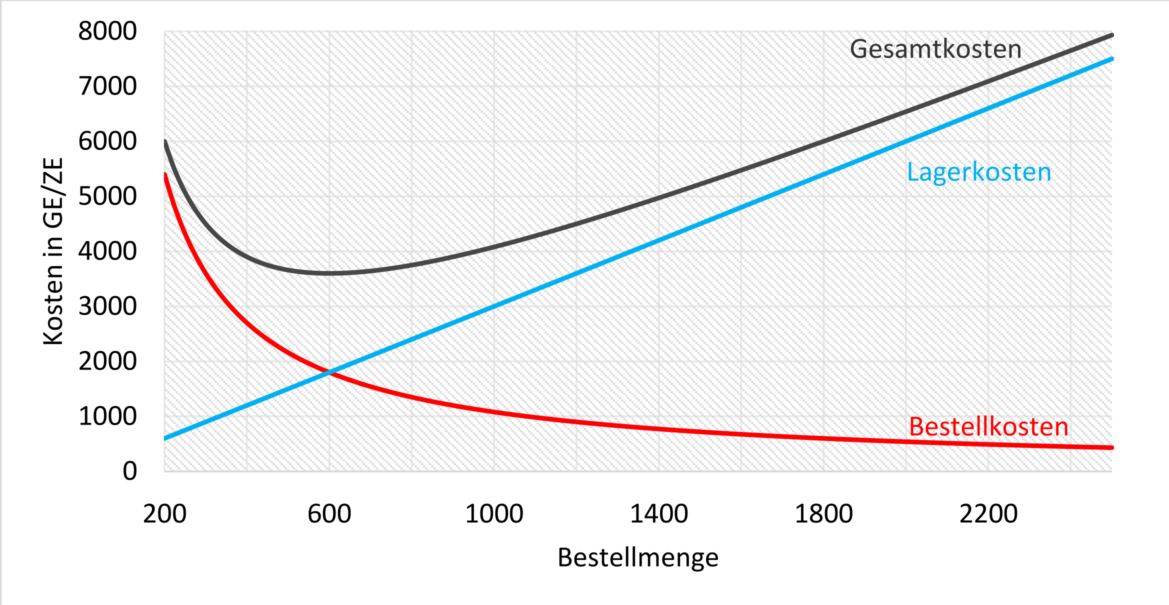
a)

Wenn die Bestellmenge Q bei sonst gleichen Bedingungen steigt, werden die Lagerkosten pro Zeiteinheit größer.

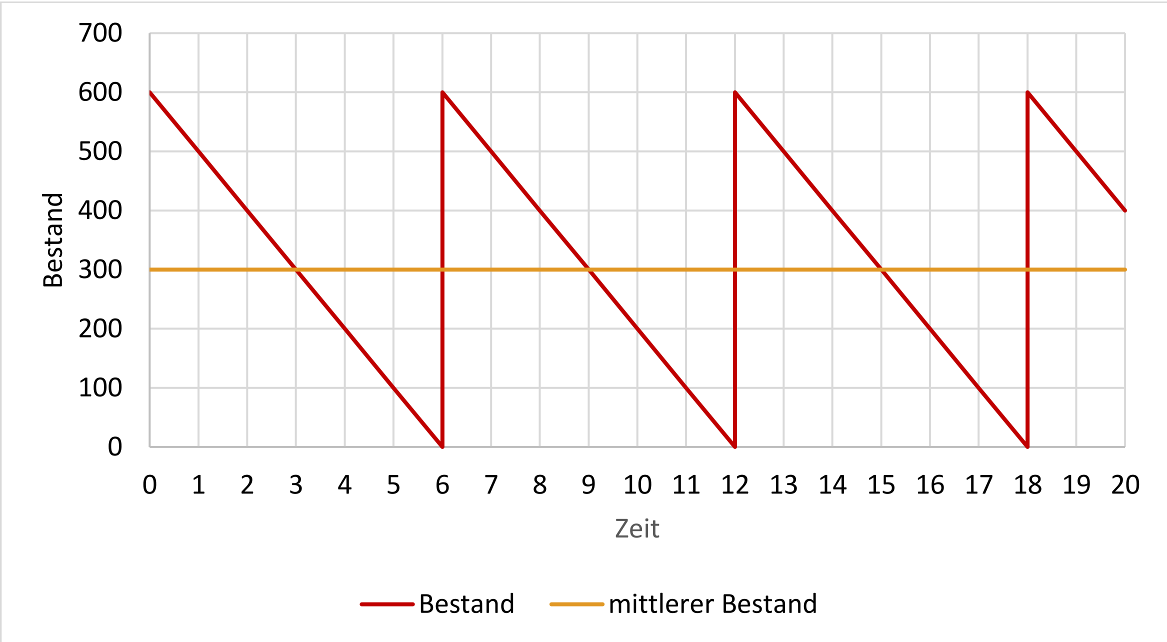
b)

Wenn die Bestellmenge Q bei sonst gleichen Bedingungen steigt, werden die Bestellkosten pro Zeiteinheit kleiner.

c)



d)



e)

Der maximale Lagerbestand entspricht der Bestellmenge Q und der mittlere Lagerbestand entspricht der halben Bestellmenge.

Aufgabe 4.7 – Fahrradhelme

Die Nachfrage ist bekannt und über alle Nachfrageperioden konstant. Die optimale Bestellmenge Q^* unter Beachtung des Trade-offs zwischen Lagerhaltungskosten und Bestellkosten wird im EOQ-Modell wie folgt berechnet:

a) $Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s \cdot d}{k^l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\mathrm{GE} \cdot 5.000 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Jahr}}}{5 \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME\ Jahr}}}} = 200\mathrm{ME}$

b) Die Länge des Bestellzyklus entspricht der Zeit zwischen 2 Bestellungen:

$\frac{Q^*}{d} = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s}{d \cdot k^l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\mathrm{GE}}{5.000 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Jahr}} \cdot 5 \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME\ Jahr}}}} = 0{,}04 \text{ Jahre} = 10 \text{ Tage}$

c) Die Kosten bei der optimalen Bestellmenge Q^* ergeben sich wie folgt:

$$K^{total}(Q^*) = \sqrt{2 \cdot k^s \cdot d \cdot k^l} = \sqrt{2 \cdot 20\mathrm{GE} \cdot \frac{5.000\mathrm{ME}}{\mathrm{Jahr}} \cdot 5 \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME\ Jahr}}} = \frac{1000\mathrm{GE}}{\mathrm{Jahr}} = 4 \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{Tag}}$$

d) $d = 20 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Tag}}$ -> $2 \cdot 20 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Tag}} = 40 \text{ ME}$

Aufgabe 4.8 – Sonnenbrillen-Cases

a)

$$d = 1000 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Quartal}}$$

$$k^s = 50\mathrm{GE}$$

$$k^l = 0{,}40 \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME\ ZE}}$$

Optimale Bestellmenge:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s \cdot d}{k^l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\mathrm{GE} \cdot 1000 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{ZE}}}{0{,}40 \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{ME\ ZE}}}} = \sqrt{250000} = 500\mathrm{ME}$$

b)

Mittlerer Lagerbestand:

$$\frac{Q^*}{2} = \frac{500 \text{ ME}}{2} = 250\mathrm{ME}$$

c)

$$d = 1000 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Quartal}} = 11{,}1 \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{Tag}}$$

$$\frac{230 \text{ ME}}{11{,}1 \frac{ME}{Tag}} = 20{,}7 \text{ Tage}$$

$$\frac{230\ ME}{1000\ \frac{ME}{Quartal}} = 0{,}23\ Quartal \xrightarrow{\times 90\ Tage} 20{,}7\ Tage$$

d)

Lagerkostensatz:

Im Optimum: $K^{s,total} = K^{l,total}$

$$100\frac{€}{\text{Quartal}} = \frac{Q^*}{2} \times k^l$$

$$100\frac{€}{\text{Quartal}} = \frac{125}{2} \times k^l$$

$$k^l = 0{,}8\ \frac{€}{\text{ME Quartal}}$$

Aufgabe 4.9 – Backwerk

a.

$$\text{Durchschnittliche Lagerreichweite} = \frac{\text{durchschnittlicher Lagerbestand}}{\text{durchschnittlicher Bedarf pro Periode}}$$

$$= \frac{40.000€}{100.000\frac{€}{\text{Monat}}} = 0{,}4 \text{ Monate} = 12 \text{ Tage}$$

b.

$$\text{Umschlaghäufigkeit im Lager} = \frac{\text{Lagerabgänge pro Periode}}{\text{Durchschnittlicher Lagerbestand}} = \frac{100.000\frac{€}{\text{Monat}}}{40.000€}$$

$$= \frac{2{,}5}{\text{Monat}}$$

c.

$$\text{Umschlaghäufigkeit im Lager} = \frac{7.500\frac{€}{\text{Monat}}}{25.000€} = \frac{0{,}3}{\text{Monat}}$$

Aufgabe 4.10 – Schokoladenfabrik

a)

EPQ-Modell

b)

i. $$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s \cdot b}{k^l \cdot \left(1 - \frac{b}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600\ \text{GE} \cdot 2000\frac{\text{kg}}{\text{Tag}}}{80\frac{\text{GE}}{\text{kg} \cdot \text{Tag}} \cdot \left(1 - \frac{2000\frac{\text{kg}}{\text{Tag}}}{8000\frac{\text{kg}}{\text{Tag}}}\right)}} = 200\ \text{kg}$$

ii.

$$\frac{Q^*}{b} = \frac{200\ \text{kg}}{2000\frac{\text{kg}}{\text{Tag}}} = 0{,}1 \text{ Tage}$$

iii.

$$\frac{Q^*}{p} = \frac{200\ \text{kg}}{8000\,\frac{\text{kg}}{\text{Tag}}} = 0{,}025\ \text{Tage}$$

iv.

$$Q^*\left(1-\frac{d}{p}\right) = 150\ \text{kg}$$

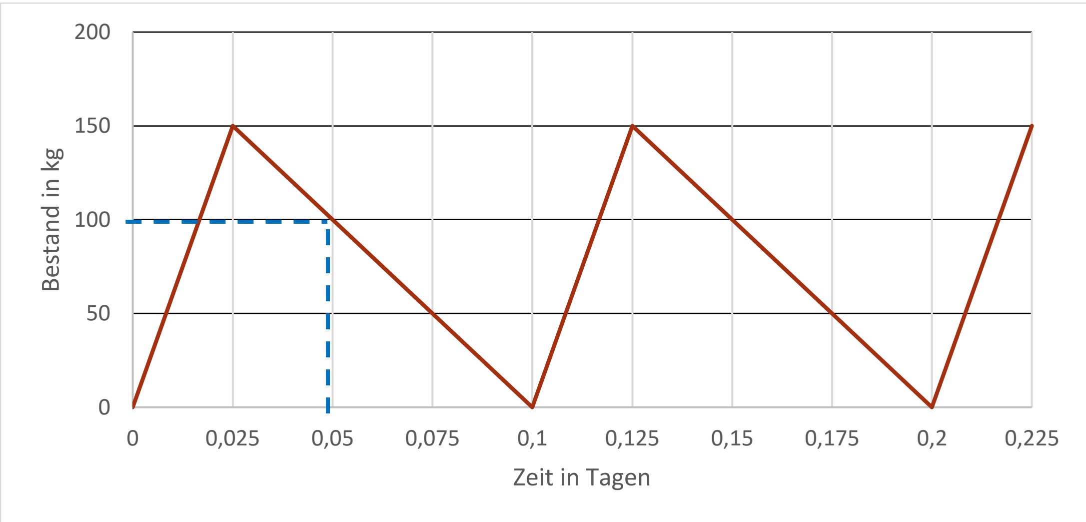
v.

$$\frac{Q^*(1-\frac{d}{p})}{2} = 75\ \text{kg}$$

c)

Es ist der Zeitpunkt gesucht, bei dem der Lagerbestand, bei gegebener Rüstzeit, gerade so noch zur Befriedigung der Nachfrage genügt. Bei einer Bedarfsrate von $2000\,\frac{\text{kg}}{\text{Tag}}$, folgt für den Bedarf innerhalb des 0,05 Tages: $0{,}05\ \text{Tag} \cdot 2000\,\frac{\text{kg}}{\text{Tag}} = 100\ \text{kg}$.

d)



Minimaler Bestand: (0 ; 0), (0,1 ; 0), (0,2 ; 0)

Maximaler Bestand: (0,025 ; 150), (0,125 ; 150), (0,225 ; 150)

Aufgabe 4.11 – Sonnenbrillen-Cases II

a.

i.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s \cdot d}{k^l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 2250}{10}} = 300\ \text{ME}$$

ii.

$$K^{l,total}(Q^*) = \frac{Q}{2} \cdot k^l = \frac{300}{2} \cdot 10 = 1500\ \frac{€}{ZE}$$

$$K^{s,total}(Q^*) = \frac{d}{Q^*} \cdot k^s = \frac{2250}{300} \cdot 200 = 1500\ \frac{€}{ZE}$$

iii.

$$\frac{Q^*}{d} = \frac{300}{2250} = \frac{2}{15} = 0{,}1333\ ZE$$

iv.

Der maximale Lagerbestand beträgt $Q^* = 300\ ME$ und der mittlere Lagerbestand beträgt $\frac{Q^*}{2} = 150\ ME.$

b.

i.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s \cdot b}{k^l \cdot \left(1 - \frac{b}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 2250}{10 \cdot \left(1 - \frac{2250}{3000}\right)}} = 600\ ME$$

ii.

$$K^{l,total}(Q^*) = \frac{Q^*}{2} \cdot k^l \cdot \left(1 - \frac{b}{p}\right) = \frac{600}{2} \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{2250}{3000}\right) = 750 \frac{€}{ZE}$$

$$K^{s,total}(Q^*) = \frac{b}{Q^*} \cdot k^s = \frac{2250}{600} \cdot 200 = 750\ \frac{€}{ZE}$$

iii.

$\frac{Q^*}{b} = \frac{600}{2250} = \frac{4}{15} = 0{,}2667\ ZE$ und $\frac{Q^*}{p} = \frac{600}{3000} = 0{,}2\ ZE$

iv.

Der maximale Lagerbestand beträgt $Q^* \cdot \left(1 - \frac{b}{p}\right) = 150\ ME$ und der mittlere Lagerbestand beträgt $\frac{Q^*}{2} \cdot \left(1 - \frac{b}{p}\right) = 75\ ME.$

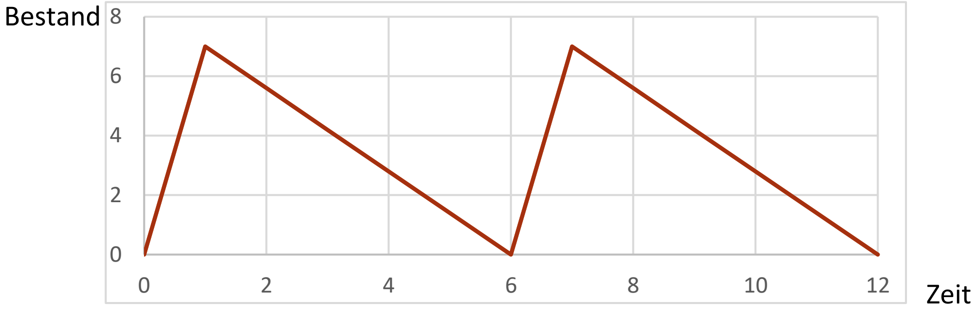
Aufgabe 4.12 – Kostenkurven

1. Fehler: Die Achsenbeschriftungen sind vertauscht.

2. Fehler: Da sich die Gesamtkosten als Summe aus Lagerkosten und Rüstkosten ergeben und diese jeweils positiv sind, können die Gesamtkosten unmöglich niedriger als die Lagerkosten sein.

3. Fehler: Die Gesamtkostenkurve muss nach oben verschoben werden, da die Gesamtkosten = Lagerkosten + Rüstkosten sind.

Aufgabe 4.13 – Einordnung



Der Lagerbestand steigt während der Produktionsphase nicht sprunghaft an. Es handelt sich um ein Problem mit *endlicher* Produktionsrate.

Aufgabe 4.14 – Klausurkorrektur

Die Gesamtkosten verlaufen im Optimum recht flach. Kleine Abweichungen von der errechneten optimalen Losgröße führen daher nur zu einem minimalen Anstieg der Kosten je Zeiteinheit.

Thema 5 – Losgrößenplanung (dynamische Nachfrage)

Aufgabe 5.1 – Bestandsmanagement II

a.

i.

Erwartungswert und Varianz:

Da die Nachfragemengen in allen Perioden unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert d und Varianz σ^2 sind, ist die Gesamtnachfrage über alle betrachteten Perioden ebenso normalverteilt mit Erwartungswert $l \cdot d$ und Varianz $l \cdot \sigma^2$.

z_α bestimmen:

Suche den Bestellpunkt s so dass:

$\alpha - \text{Servicegrad} = P(D_1 + \cdots + D_l \leq s)$

Mit $D_1 + \cdots + D_l = D_{gesamt}$:

$\alpha - \text{Servicegrad} = P(D_{gesamt} \leq s)$

Es folgt durch Standardisierung der Gesamtnachfrage D_{gesamt} :

$$\alpha - \text{Servicegrad} = P\left(z_\alpha \leq \frac{s - l \cdot d}{\sqrt{l} \cdot \sigma}\right) = F\left(z_\alpha = \frac{s - l \cdot d}{\sqrt{l} \cdot \sigma}\right)$$

$$z_\alpha = \frac{s - l \cdot d}{\sqrt{l} \cdot \sigma} = F^{-1}(\alpha) \rightarrow F^{-1}(0{,}99) = 2{,}33 = z_\alpha$$

Optimaler Bestellpunkt:

Einsetzen der Werte in die Formel liefert den optimalen Bestellpunkt:

$s = l \cdot d + z_\alpha \cdot \sqrt{l} \cdot \sigma$

$s = 2 \cdot 50ME + 2{,}33 \cdot \sqrt{2} \cdot 20ME = 165{,}90ME \approx 166ME$

Daraus folgt für den Sicherheitsbestand:

$SB = z_\alpha \cdot \sqrt{l} \cdot \sigma = s - l \cdot d = 166ME - 100ME = 66ME$

ii.

Analog für einen α-Servicegrad von 95%

$F^{-1}(0{,}95) = 1{,}65$

$s = l \cdot d + z_\alpha \cdot \sqrt{l} \cdot \sigma$

$s = 100ME + 1{,}65 \cdot \sqrt{2} \cdot 20ME = 146{,}67ME \approx 147ME$

$SB = z_\alpha \cdot \sqrt{l} \cdot \sigma = 1{,}65 \cdot \sqrt{2} \cdot 20ME = 46{,}67ME \approx 47ME$

b.

Für α=99%:

$$\text{Durchschnittlicher Lagerbestand} = \text{SB} + \frac{\text{Q}}{2} = 66\text{ME} + \frac{250\text{ME}}{2} = 66\text{ME} + 125\text{ME}$$
$$= 191\text{ME}$$

Für α=95%:

$$\text{Durchschnittlicher Lagerbestand} = \text{SB} + \frac{\text{Q}}{2} = 47\text{ME} + \frac{250\text{ME}}{2} = 47\text{ME} + 125\text{ME}$$
$$= 172\text{ME}$$

c.

Für α=99%:

$$\text{Umschlaghäufigkeit} = \frac{\text{Lagerabgänge pro Periode}}{\text{Durchschnittlicher Lagerbestand}} = \frac{\text{d}}{\text{SB} + \frac{\text{Q}}{2}} = \frac{50\frac{\text{ME}}{\text{Tag}}}{191\text{ME}} = \frac{0{,}26}{\text{Tag}}$$

Für α=95%:

$$\text{Umschlaghäufigkeit} = \frac{\text{Lagerabgänge pro Periode}}{\text{Durchschnittlicher Lagerbestand}} = \frac{\text{d}}{\text{SB} + \frac{\text{Q}}{2}} = \frac{50\frac{\text{ME}}{\text{Tag}}}{172\text{ME}} = \frac{0{,}29}{\text{Tag}}$$

d.

$$\text{Lagerreichweite} = \frac{\text{aktueller Lagerbestand am Stichtag}}{\text{durchschnittlicher Bedarf pro Periode}} = \frac{8000\text{ME}}{\text{d}} = \frac{8000\text{ME}}{50\frac{\text{ME}}{\text{Tag}}}$$
$$= 160\text{ Tage}$$

e.

i. Sicherheitsbestand steigt, da die Opportunitätskosten steigen
ii. Sicherheitsbestand sinkt, da unnötig Lagern (wenn zu viel bestellt wurde) teurer wird

Aufgabe 5.2 – Modeunternehmen

a.

Da es sich bei der Basic-Hose um einen mehrperiodigen Planungszeitraum handelt und die Nachfrage nach der Basic Hose normalverteilt ist, ist das (s,q)-Modell zu verwenden. Somit berechnet sich der optimale Bestellpunkt mit folgender Formel:

$$\text{s}^* = \text{l} \cdot \text{d} + \text{SB} = \text{l} \cdot \text{d} + \text{z}_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\text{l}}$$

Für ein Servicelevel von 95% entnehmen wir aus der Tabelle der Standardnormalverteilung:

$z_\alpha = 1{,}65$. Damit lässt sich der optimale Bestellpunkt mit den Werten aus der Aufgabenstellung berechnen:

$$s^* = 25\text{ Tage} \cdot 50\frac{\text{ME}}{\text{Tag}} + 1{,}65 \cdot 12\frac{\text{ME}}{\text{Tag}} \cdot \sqrt{25}\text{ Tage} = 1250\text{ME} + 99\text{ME} = 1349\text{ ME}$$

$$mit: SB = 1{,}65 \cdot 12\frac{\text{ME}}{\text{Tag}} \cdot \sqrt{25}\text{ Tage} = 99\text{ME}$$

b.

Im (s,Q)-Modell gilt für die optimale Bestellmenge $Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k^s \cdot d}{k^l}}$. Umstellen dieser Formel und Einsetzen der bekannten Größen liefert den Lagerkostensatz:

$$k^l = \frac{2 \cdot k^s \cdot d}{{Q^*}^2} = \frac{2 \cdot 7500€ \cdot 50 \frac{ME}{Tag}}{5000^2\ ME^2} = 0{,}03\ \frac{€}{ME\ Tag}$$

Die Lagerkosten pro Zeiteinheit ergeben sich aus dem Produkt des Lagerkostensatzes und des mittleren Lagerbestandes. Da sich bei dem (s,Q)-Modell durchschnittlich die halbe Bestellmenge $\frac{Q^*}{2} = 2500\ ME$ und der Sicherheitsbestand i.H.v. 99ME (aus Aufgabenteil a)) im Lager befinden, folgt somit für die Lagerkosten pro Tag:

$$K^{l,total}(Q^*) = k^l \cdot \left(\frac{Q^*}{2} + SB\right) = 0{,}03 \frac{€}{ME\ Tag} \cdot (2500 + 99)ME = 77{,}97 \frac{€}{Tag}$$

c.

i.

Da genau dann eine neue Lieferung veranlasst wird, wenn der Lagerbestand den Bestellpunkt erreicht, entspricht der Lagerbestand zu Beginn der Lieferzeit dem Bestellpunkt s^*. Das Servicelevel beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der die Bedarfsanforderungen vollständig gedeckt werden. Bei einem Lagerbestand von 1349 ME zu Beginn der Lieferzeit kann nur die Nachfrage in Höhe von 1000 Mengeneinheiten vollständig befriedigt werden. Dementsprechend folgt für das Servicelevel:

$$\text{Servicelevel} = \propto - \text{Servicegrad} = P(D \leq 1349ME) = P(D = 1000\ ME) = 40\%$$

ii.

Mit der erwarteten Nachfrage pro Monat, die der erwarteten Nachfrage innerhalb der Lieferzeit (Lieferzeit = 1 Monat) entspricht und einem Lagerbestand zu Beginn der Lieferzeit i.H.v. 1349 ME, lässt sich die Fill Rate während der Lieferzeit folgendermaßen berechnen:

$$\text{Fill Rate} = \frac{E\,[\min\{D, s^*\}]}{E[D]}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot \min\{1000{,}1349\} + 0{,}3 \cdot \min\{1500{,}1349\} + 0{,}3 \cdot \min\{1800{,}1349\}}{0{,}4 \cdot 1000 + 0{,}3 \cdot 1500 + 0{,}3 \cdot 1800}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 1000 + 0{,}6 \cdot 1349}{1390} = \frac{1209{,}4}{1390} = 87{,}01\%$$

d.

i.

D [ME]	P (D = d)	P (D ≤ d)
3000	0,5	0,5
4500	0,5	1,0

Da ein konkreter Konflikt zwischen zu viel und zu wenig bestellter Menge bei unsicherer Nachfrage und ein einperiodiger Planungszeitraum vorliegt, verwenden wir das Zeitungsjungenmodell.

Die Fehlmengenkosten ergeben sich durch den entgangenen Gewinn an einer Hose und an einem Gürtel. Die Überbestandskosten stellen die Produktionskosten einer Hose dar. Damit folgt:

$$c_u = \text{Gewinn}_{\text{Hose}} + \text{Gewinn}_{\text{Gürtel}} = (30€ - 12{,}5€) + 7{,}5€ = 25€$$

$$c_O = 12{,}5€$$

$$\propto -\text{Servicegrad} = \text{krit. Verhältnis} = \frac{c_U}{c_O + c_U} = \frac{25€}{25€ + 12{,}5€} = 66{,}67\%$$

ii.

Es ist das erste Q zu wählen, das die untenstehende Gleichung erfüllt.

$$P(D \leq Q) \geq \text{krit. Verhältnis}$$

Damit folgt aus der Verteilungsfunktion:

$$\rightarrow Q^* = 4500 \text{ ME}$$

e.

Da von den bestellten 4500 Mengeneinheiten nach der Hälfte der Saison (= 3 Monate) nur noch 1500 Mengeneinheit verblieben sind, folgt für die Nachfrage pro Monat und die Lagerreichweite:

$$d = \frac{4500 \text{ ME} - 1500 \text{ ME}}{3 \text{ Monate}} = \frac{3000 \text{ ME}}{3 \text{ Monate}} = 1000 \frac{\text{ME}}{\text{Monat}}$$

$$\text{Lagerreichweite} = \frac{\text{akt. Lagerbestand}}{d} = \frac{1500 \text{ ME}}{1000 \frac{\text{ME}}{\text{Monat}}} = 1{,}5 \text{ Monate} = 37{,}5 \text{ Tage}$$

Aufgabe 5.3 – CLSP ohne Julia

a)

t	1	2	3	4	5
b_{1t}		5	20		5
b_{2t}	10	10		20	
b_{3t}		10	5		10
X_{1t}	8		17		5
X_{2t}	10	10		20	
X_{3t}		11	4		10
L_{1t}	8	3	0	0	0
L_{2t}	0	0	0	0	0
L_{3t}	0	1	0	0	0

γ_{1t}	1	0	1	0	1
γ_{2t}	1	1	0	1	0
γ_{3t}	0	1	1	0	1

b)

Rüstkosten = $50 \cdot (1 + 0 + 1 + 0 + 1) + 5 \cdot (1 + 1 + 0 + 1 + 0) + 20 \cdot (0 + 1 + 1 + 0 + 1) = 225$

Lagerkosten = $1 \cdot (8 + 3 + 0 + 0 + 0) + 5 \cdot (0 + 0 + 0 + 0 + 0) + 2 \cdot (0 + 1 + 0 + 0 + 0) = 13$

$\text{Gesamtkosten} = \text{Rüstkosten} + \text{Lagerkosten} = 225 + 13 = 238$

Die Kapazitätsrestriktion c_t = 45 min wird hier für alle $t = 5$ Zeitperioden eingehalten.

c)

t	1	2	3	4	5
X_{1t}	0	30	0	0	0
X_{2t}	10	10	0	20	0
X_{3t}	0	15	0	0	10
L_{1t}	0	25	5	5	0
L_{2t}	0	0	0	0	0
L_{3t}	0	5	0	0	0

Rüstkosten = $50 \cdot (0 + 1 + 0 + 0 + 0) + 5 \cdot (1 + 1 + 0 + 1 + 0) + 20 \cdot (0 + 1 + +0 + 1) \quad = 105$

Lagerkosten = $1 \cdot (0 + 25 + 5 + 5 + 0) + 5 \cdot (0 + 0 + 0 + 0 + 0) + 2 \cdot (0 + 5 + 0 + 0 + 0) = 45$

$\text{Gesamtkosten} = \text{Rüstkosten} + \text{Lagerkosten} = 105 + 45 = 150$

Die Kapazitätsrestriktion c_t = 95 min wird hier für alle $t = 5$ Zeitperioden eingehalten.

Lösungsansatz:

Dadurch, dass dieser Produktionsplan nicht zu komplex ist, kann dieser ohne Julia gelöst werden. Hierbei ist es wichtig die Rüst- und Lagerkosten zu vergleichen, um eine kostenoptimale Lösung zu erhalten.

Für Produkt 1 schaut das wie folgt aus:

t	1	2	3	4	5
b_{1t}		5	20		5
X_{1t}	?	?	?	?	?
L_{1t}	?	?	?	?	?

In Periode 2 muss produziert werden, da eine Nachfrage von 5 ME besteht.

Daraus folgt:

t	1	2	3	4	5
b_{1t}		5	20		5
X_{1t}	0	5	?	?	?
L_{1t}	0	0	?	?	?

In Periode 3 existiert eine Nachfrage von 20 ME. Sollte Produkt 1 in Periode 3 produziert werden oder in Periode 2 produziert werden und für eine Periode eingelagert werden?

Hypothetische Rüstkosten: $1 * 50€ = 50€$

Hypothetische Lagerkosten: $20\ ME * 1 \frac{€}{ME * Periode} * 1\ Periode = 20€$

Rüstkosten > Lagerkosten → Wir produzieren die 20 ME, die in Periode 3 nachgefragt werden, in Periode 2 und lagern diese ein.

Daraus folgt:

t	1	2	3	4	5
b_{1t}		5	20		5
X_{1t}	0	25	0	?	?
L_{1t}	0	20	0	?	?

In Periode 5 existiert eine Nachfrage von 5 ME. Sollte Produkt 1 in Periode 5 produziert werden oder in Periode 2 produziert werden und für drei Periode eingelagert werden?

Hypothetische Rüstkosten: $1 * 50€ = 50€$

Hypothetische Lagerkosten: $5\ ME * 1 \frac{€}{ME * Periode} * 3\ Perioden = 15€$

Rüstkosten > Lagerkosten → Wir produzieren die 5 ME, die in Periode 3 nachgefragt werden, in Periode 2 und lagern diese ein.

Daraus folgt für Produkt 1:

t	1	2	3	4	5
b_{1t}		5	20		5
X_{1t}	0	30	0	0	0
L_{1t}	0	25	5	5	0

Aufgabe 5.4 – Der Masterstudent beim Babybrei-Hersteller

t	1	2	3	4
b_{1t}	10	20	0	0
b_{2t}	0	10	5	5
X_{1t}	30	0	**0**	0
X_{2t}	**10**	10	0	0
L_{1t}	**20**	0	0	0
L_{2t}	10	10	**5**	0
γ_{1t}	1	0	0	0
γ_{2t}	**1**	**1**	0	0

Aufgabe 5.5 – Wandfarbe

a) CLSP-Modell

b) $\sum_{t=1}^{T} \gamma_{i,t} \leq 3 \quad \text{für alle } i = 1 \dots I$

```
@constraint(m, MaxRuest [i=1:I], sum((gamma[i,t]) for t=1:T) <= 3)
```

c) Rüstkosten: $60 \cdot 2 + 100 \cdot 2 + 90 \cdot 3 = 590$

Lagerkosten: $20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 190$

Gesamtkosten: $590 + 190 = 780$

d)

i. $\sum_{I=1}^{I} t_i^s \cdot \gamma_{i,t} \leq 35 \quad \text{für alle } t = 1 \dots T$

```
@constraint(m, MaxRuestZeit [t=1:T], sum(ts[i]*(gamma[i,t]) for i=1:I) <= 35)
```

ii. Der Zielfunktionswert bleibt gleich, weil die fürs Rüsten aufgebrachte Zeit nie den Wert 32 übersteigt. Der größte Wert liegt in Periode 2 vor. Die Nebenbedingung schränkt die optimale Lösung somit nicht ein.

Aufgabe 5.6 – Produktionsplan

a) 4

b) z.B.: gleiche Zeit für jeden Rüstvorgang (nicht produktabhängig); keine Rüstübertragung von einem zum nächsten Tag möglich

c) Rüstzeit insgesamt: 4 + 3 + 6 + 3 = 16 min
Rüstzeit im ursprünglichen Plan: 4 min
Zusätzliche Rüstzeit: 16 min – 4 min = 12 min

d) Das Modell erzwingt, dass exakt die im Bedarf vorgegebene Menge hergestellt wird. Demnach sind in jedem möglichen Plan die variablen Herstellkosten gleich und würden in der Zielfunktion keinen Einfluss auf die Optimierung haben.

Aufgabe 5.7 – Druckerei

a) First Come – First Served: 1-2-3-4-5

➔ den Auftrag als nächstes bearbeiten, welcher als erstes erhalten wird – siehe Spalte „Erhalten am“

Frühester Liefertermin: 3-4-5-2-1

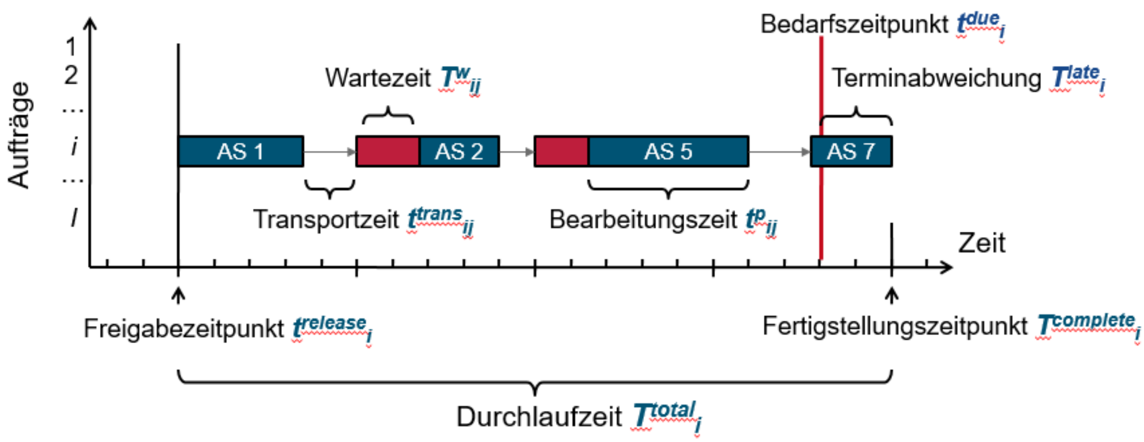
➔ den Auftrag als nächstes bearbeiten, welcher den frühesten Liefertermin hat – siehe Spalte „Wunschtermin“

b) Lateness schließt positive und negative Verspätungen ein (Bestrafung auch bei zu früher Fertigstellung); bei Tardiness werden nur positive Verspätungen berücksichtigt.

Lateness bevorzugen, wenn Lagerung von Fertigmaterial sehr teuer oder nur begrenzt möglich ist und die Kunden das Material nicht vor dem vereinbarten Liefertermin annehmen.

c)

Maschinenfolge-Gantt-Diagramm für Auftrag *j*



Die Durchlaufzeit eines Auftrages ist die Zeit zwischen Beginn der Arbeit an einem Auftrag und dessen Fertigstellung. Die Durchlaufzeit eines Auftrags ist also die Summe aus der Bearbeitungs-, Transport- und Wartezeit für diesen Auftrag (Einzelbetrachtung je Auftrag).

$$T_{\boldsymbol{i}}^{total} = \sum_{\rho=1}^{\pi} t_{ij}^{p} + t_{\boldsymbol{ij}} + T_{ij}^{w}$$

Die Zykluszeit ist die Zeit, die zum Abschluss aller Aufträge benötigt wird. Es ist also die Differenz zwischen der Anfangszeit des ersten Auftrags und der Endzeit des letzten Auftrags (Gesamtbetrachtung für alle Aufträge).

$$T^{cycle} = \max_{i=1,\,\dots,\,I}\left\{T_i^{complete}\right\} - \min_{i=1,\,\dots,\,I}\left\{t_j^{release}\right\}$$

d) Die Summe aller Einzeldurchlaufzeiten (=Gesamtdurchlaufzeit) ist immer größer/gleich der Zykluszeit. Im Falle der Gleichheit gibt es keine parallele Bearbeitung von Aufträgen.

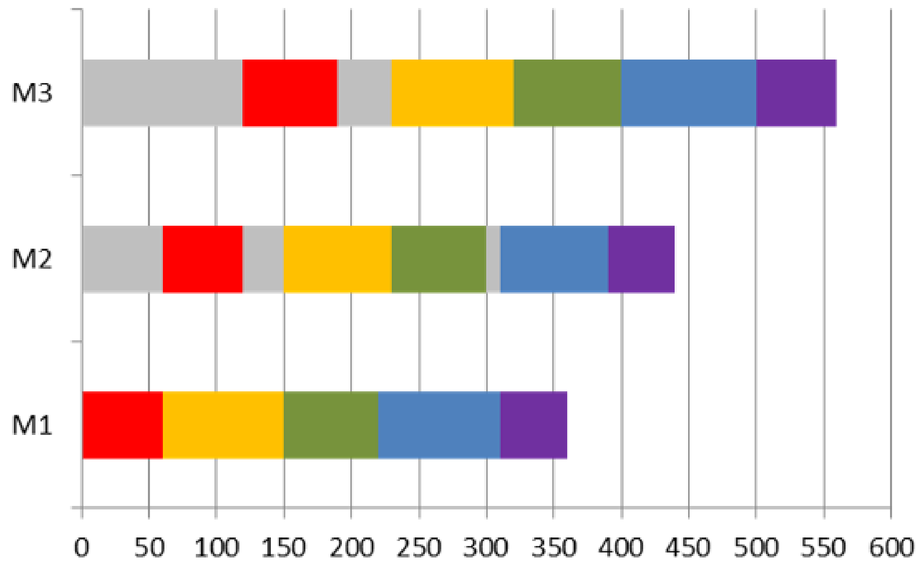
e) FCFS (First Come – First Served)

	M1	M2	M3
Maschinenbelegungszeit	360	340	400

Bearbeitungsreihenfolge:

Auftrag	M1	M2	M3	Wartezeiten	Farbe
1	60	120	190	0	
2	150	230	320	60	
3	220	300	400	180	
4	310	390	500	230	
5	360	440	560	400	

FCFS



f)

$T^{cycle} = 560 - 0 = 560$

$t_{M1} = 360$

$t_{M2} = 340$

$t_{M3} = 400$

$T_2^w = 60$

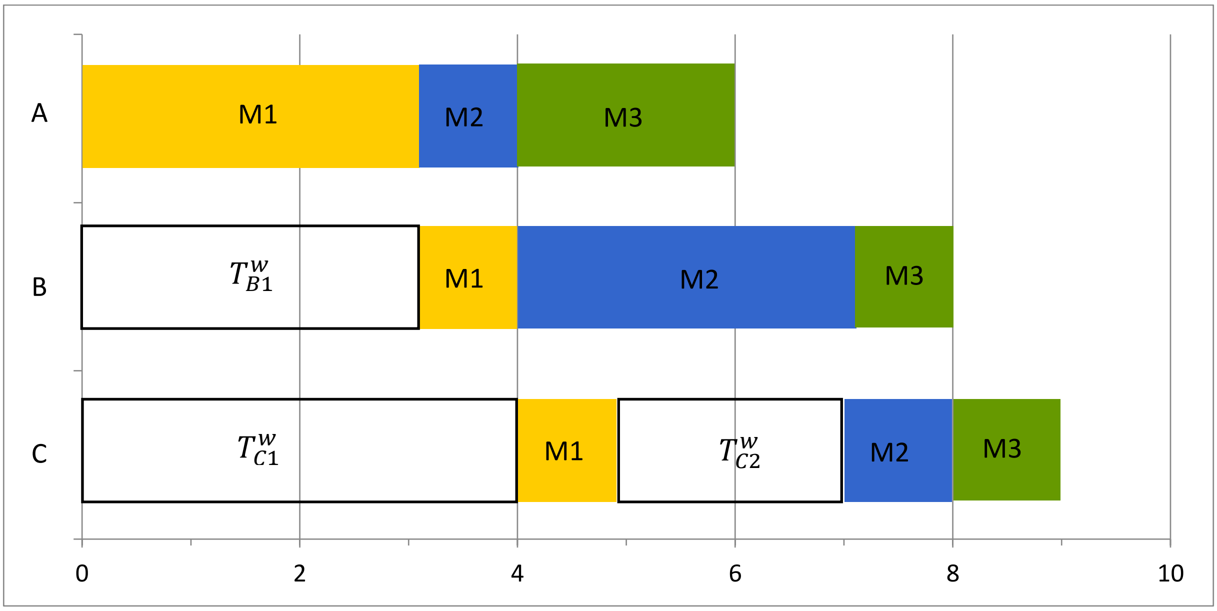
$T_3^w = 180$

$T_4^w = 230$

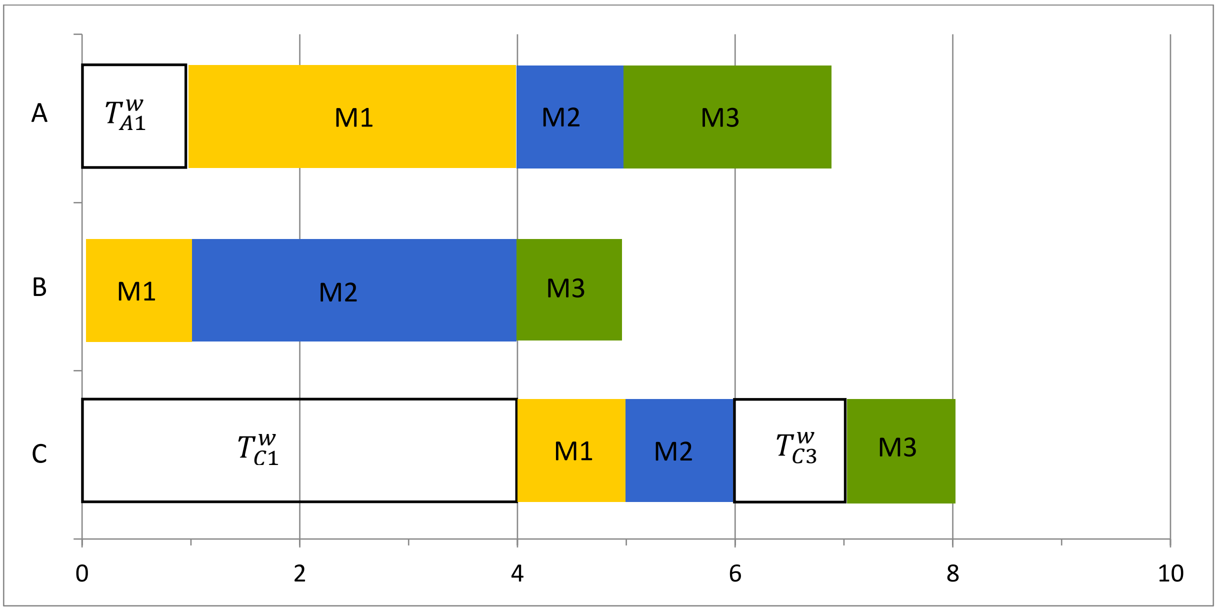
$T_5^w = 400$

Aufgabe 5.8 – Reihenfolgeplanung I

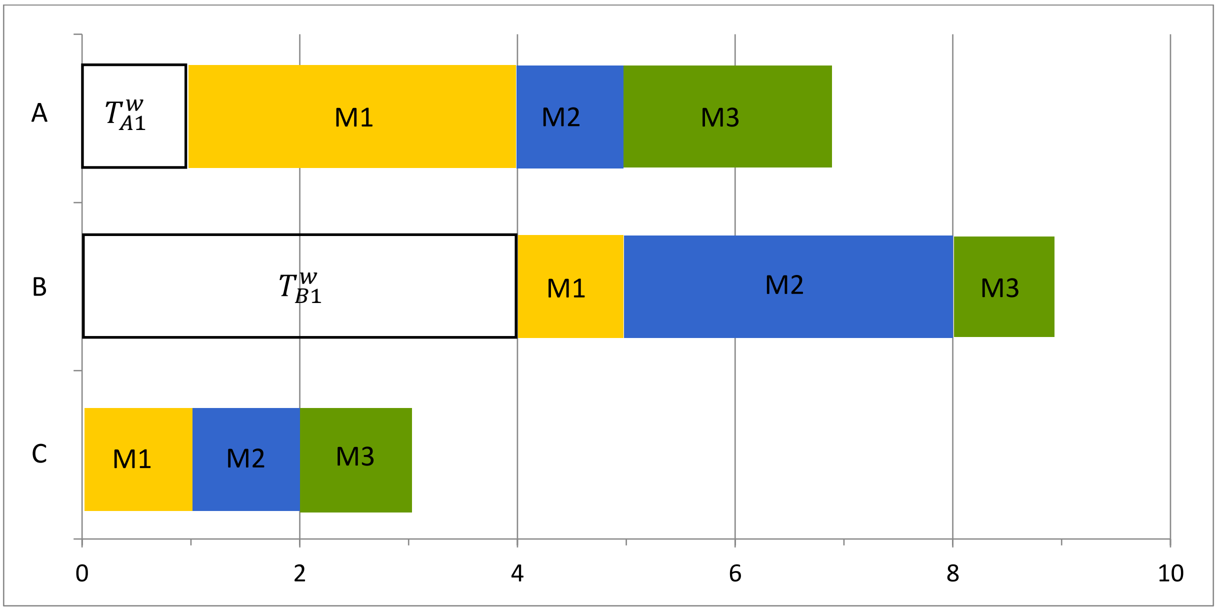
a) A-B-C



B-A-C



C-A-B



b) A-B-C

i. $T^{cycle} = 9 - 0 = 9$

ii. $T^{total} = t_{ij}^{p} + T_{ij}^{w} = 14 + 9 = 23$

iii. $U = \frac{t_{ij}^{p}}{\pi \cdot T^{cycle}} = \frac{14}{3 \cdot 9} \approx 52\%$

iv. $T^{no\ prod} = \pi \cdot T^{cycle} - t_{ij}^{p} = 3 \cdot 9 - 14 = 27 - 14 = 13$

B-A-C

i. $T^{cycle} = 8 - 0 = 8$

ii. $T^{total} = t_{ij}^{p} + T_{ij}^{w} = 14 + 6 = 20$

iii. $U = \frac{t_{ij}^{p}}{\pi \cdot T^{cycle}} = \frac{14}{3 \cdot 8} \approx 58\%$

iv. $T^{no\ prod} = \pi \cdot T^{cycle} - t_{ij}^{p} = 3 \cdot 8 - 14 = 24 - 14 = 10$

C-A-B

v. $T^{cycle} = 9 - 0 = 9$

vi. $T^{total} = t_{ij}^{p} + T_{ij}^{w} = 14 + 5 = 19$

vii. $U = \frac{t_{ij}^{p}}{\pi \cdot T^{cycle}} = \frac{14}{3 \cdot 9} \approx 52\%$

viii. $T^{no\ prod} = \pi \cdot T^{cycle} - t_{ij}^{p} = 3 \cdot 9 - 14 = 27 - 14 = 13$

c)

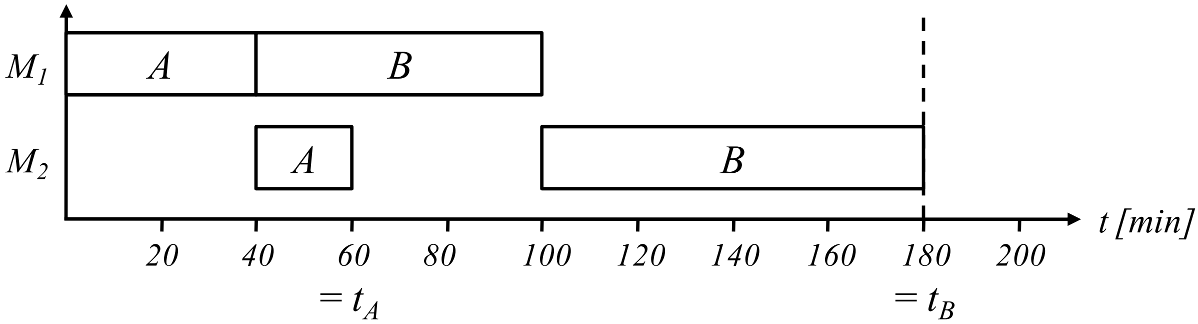
	Durchlaufzeit T^{total} (in min)	Zykluszeit T^{cycle} (in min)	Kapazitätsauslastung U (in %)
A → B → C	23	9	51,85
B → A → C	20	8	58,33
C → A → B	19	9	51,85

i. C-A-B
ii. B-A-C

d) Es kommt auf das Produkt und das Produktionssystem an. Bei Produktionen mit vielen Arbeitern ist es beispielsweise besser, die Durchlaufzeit zu minimieren, da hier die Arbeiter leicht verteilt werden können, sodass die geringe Kapazitätsauslastung ausgeglichen werden kann.

Aufgabe 5.9 – Reihenfolgeplanung II

a) Auftrags-Reihenfolge A-B

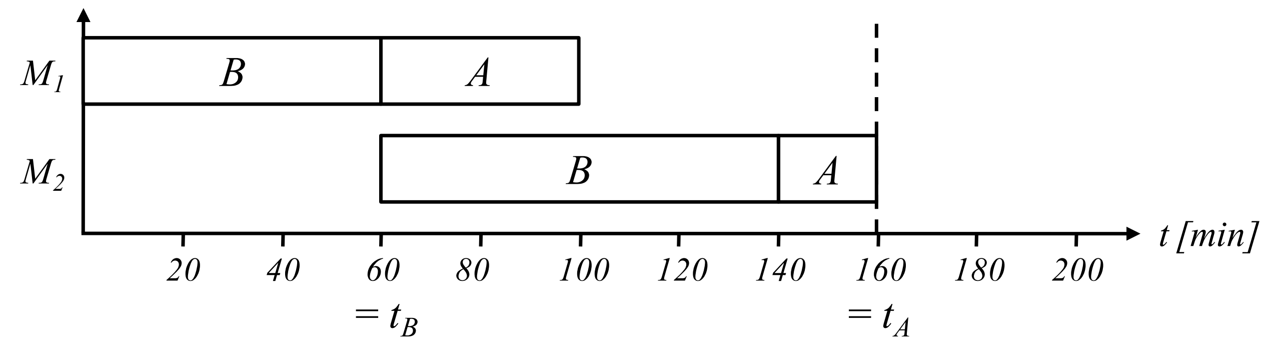


i. $T^{cycle} = 180 - 0 = 180$

ii. $T^{total} = t_{ij}^{p} + T_{ij}^{w} = 200 + 40 = 240$

iii. $U = \frac{t_{ij}^{p}}{\pi \cdot T^{cycle}} = \frac{200}{2 \cdot 180} \approx 55{,}6\%$

Auftrags-Reihenfolge B-A



i. $T^{cycle} = 160 - 0 = 160$

ii. $T^{total} = t_{ij}^{p} + T_{ij}^{w} = 200 + 60 + 40 = 300$

iii. $U = \frac{t_{ij}^{p}}{\pi \cdot T^{cycle}} = \frac{200}{2 \cdot 160} \approx 62{,}5\%$

Aufgabe 5.10 – ProTUce | Bestandsmanagement

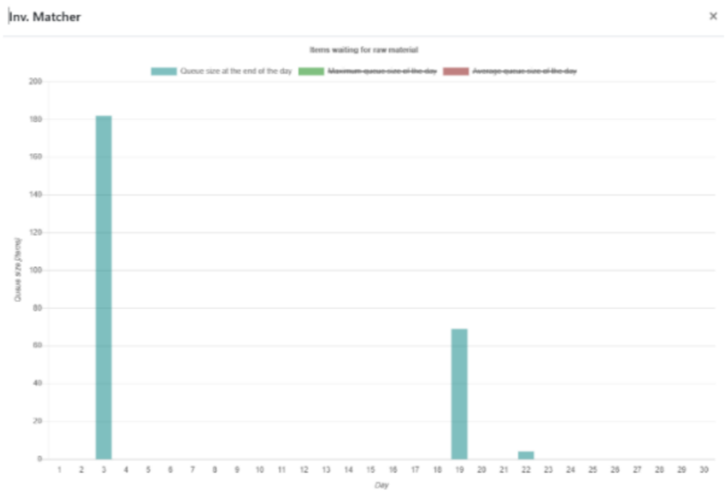
a) $Q^* = \sqrt{\frac{2 * k_s * b}{k_l}} = \sqrt{\frac{2 * 990€ * 120 \frac{Items}{Tag}}{0{,}55 \frac{€}{Tag}}} \approx 657\ Items \rightarrow \frac{657\ Items}{5 \frac{Items}{Box}} \approx 132\ Boxen$

b)

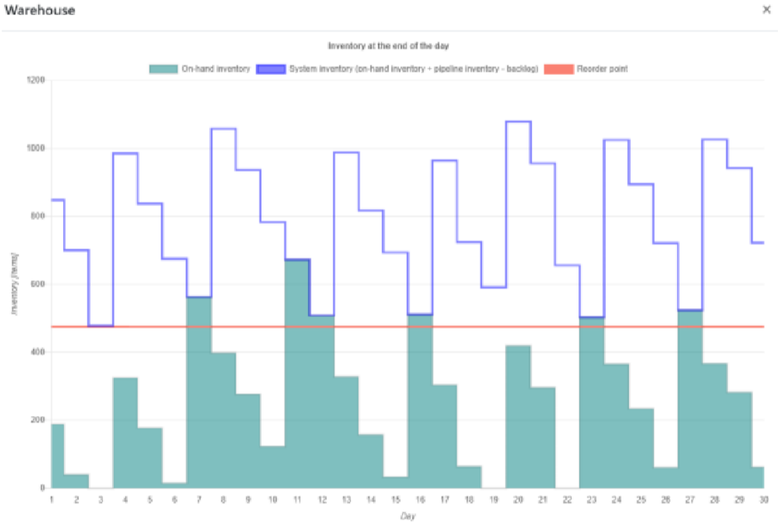
i. $s^* = 10 \frac{Items}{2\ Stunden} * 36 * 2\ Stunden + \sqrt{36} * 15\ Items * 1{,}65 \approx 509\ Items$

ii. $s^* = 10 \frac{Items}{2\ Stunden} * 36 * 2\ Stunden + \sqrt{36} * 15\ Items * 1{,}29 \approx 476\ Items$

c) Beim Betrachten der Graphen im Inventory-Matcher wird deutlich, dass das Lager an mehreren Tagen nicht ausreichend gefüllt ist. Dies führt dazu, dass Bestellungen im Inventory-Matcher verbleiben und nicht direkt an den Workshop weitergeleitet werden können. Letztendlich verlängert sich dadurch die Lieferzeit der jeweiligen Bestellung um die Wartezeit im Inventory-Matcher. Betrachtet man die Kundenverträge aus dem Sales-Office, so zeigt sich, dass die Lieferzeit für eine Bestellung an den Kunden maximal 24 Stunden betragen darf. Wird diese Zeit überschritten, ist die Bestellung nicht profitabel.



Beispielsweise warten am dritten Tag 182 Items, am 19. Tag 69 Items und am 22. Tag 4 Items im Inventory-Matcher auf die nächste Lieferung.



Durch den Graphen des Warenlagers, lässt sich erkennen, dass stets am darauffolgenden Tag eine Lieferung des Supplier erfolgt. Dadurch bleibt die Lieferzeit für jede Bestellung im Rahmen der erlaubten 24 Stunden, sofern die Kapazität des Workshops ausreicht.

d) Erwarteter Bedarf: $12\,\frac{Orders}{Tag} * 10\,\frac{Items}{Order} * 30\,Tage = 3600\,Items$

Umsatz: $3600\,Items * 50\,\frac{€}{Item} + 360\,Orders * 10\,\frac{€}{Order} = 183600\,€$

Gesamtkosten: 45.805,65 €

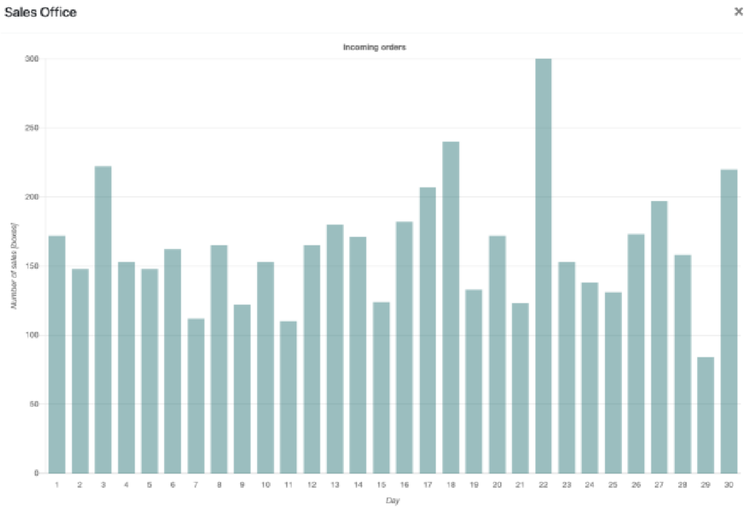
Bestellkosten: $\frac{3600\,Items - 400\,Items}{657\frac{Items}{Order}} \approx 5\,Orders \rightarrow K^{s,total}(Q) = 4950\,€$

Materialkosten: $5\,Orders * 132\,\frac{Boxen}{Order} * 50\,\frac{€}{Box} = 33000\,€$

Lagerkosten (Servicelevel = 95%): $K^{l,total}(Q) = 0{,}55\,\frac{€}{Item*Tag} * 30\,Tage * \left(\frac{657}{2}\,Items + 1{,}65 * 15\,Items * \sqrt{36}\right) = 7870{,}5\,€$

Gewinn: 183.600 € − 4.950 € − 33.000 € − 7.870,5 € = 137.779,5 €

e) Nach der Simulation ist zu erkennen, dass die tatsächliche Nachfrage stark von der zuvor analytisch berechneten abweicht. Zuvor haben wir berechnet, dass der erzielte Umsatz über einen Zeitraum von 30 Tagen 183.600 € beträgt. Im Rahmen der Simulation zeigt sich jedoch, dass der tatsächlich erzielte Umsatz 249.500 € beträgt. Statt der vorhergesagten 3.600 Items wurden über die 30 Tage hinweg insgesamt 4.918 Items nachgefragt. Aufgrund der erhöhten Menge verändert sich sowohl der erzielte Umsatz als auch die entstandenen Kosten.



Umsatz: $4918\,Items * 50\frac{€}{Item} + 360\,Orders * 10\frac{€}{Order} = 249500\,€$

Gesamtkosten: 60.985,65 €

Bestellkosten: $\frac{4918\,Items - 400\,Items}{657\frac{Items}{Order}} \approx 7\,Orders \rightarrow K^{s,total}(Q) = 6930\,€$

Materialkosten: $7\,Orders * 132\frac{Boxen}{Order} * 50\frac{€}{Box} = 46200\,€$

Lagerkosten (Servicelevel = 95%): $K^{l,total}(Q) = 0{,}55\frac{€}{Item*Tag} * 30\,Tage * \left(\frac{657}{2}Items + 1{,}65 * 15\,Items * \sqrt{36}\right) = 7870{,}5\,€$

Gewinn: 249.500 € − 6.930 € − 46.200 € − 7.870,5 € = 188.499,5 €

Der simulierte Gewinn beträgt 190.00 €