POM-Basics

Einführung in Produktions- und Dienstleistungsmanagement

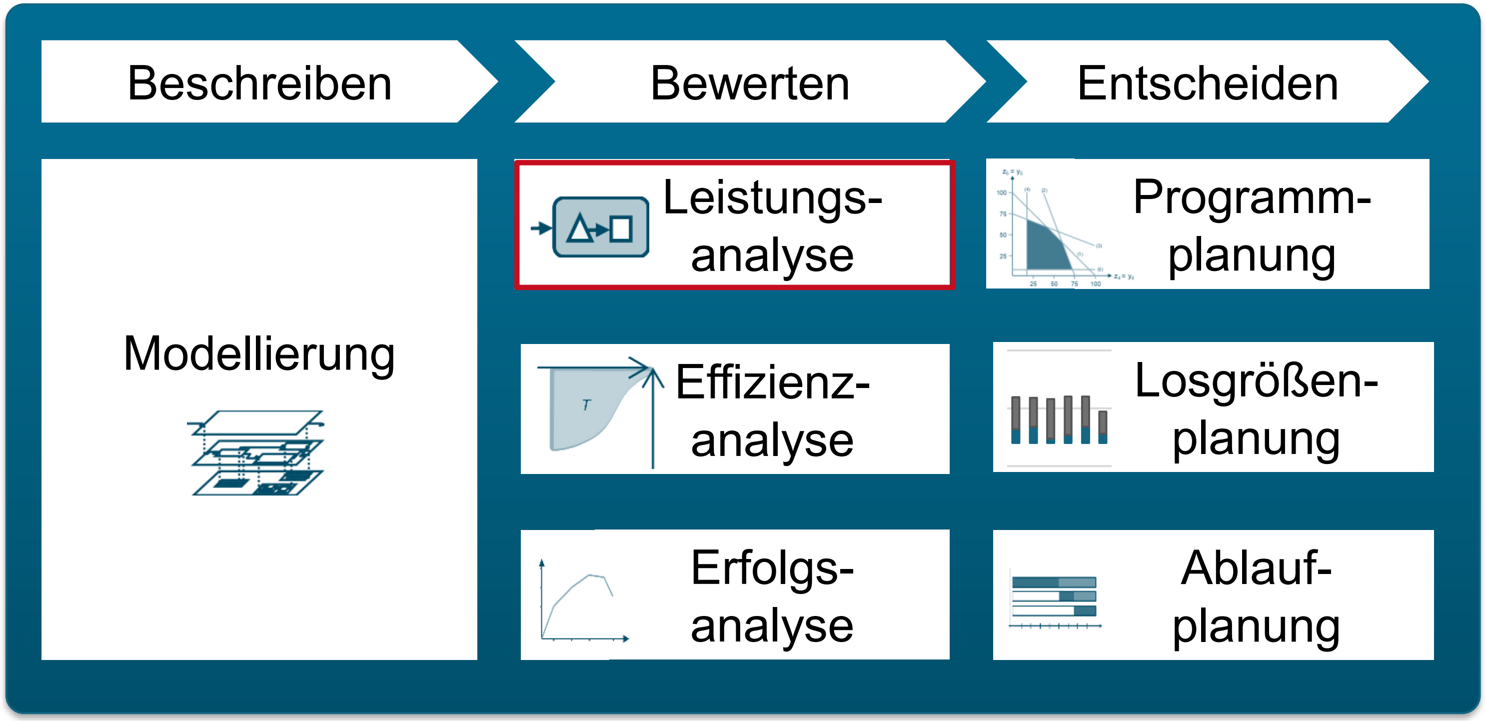
Photo by Johann Walter Bantz on Unsplash

Themenblock 1

Leistungsanalyse

Fakultät VII *Wirtschaft & Management*
Fachgebiet Industrielles Produktions- und Dienstleistungsmanagement
Prof. Dr. Thomas Volling

Rahmen der Veranstaltung



Wie lassen sich Leistungsgrößen dynamischer Produktionsprozesse ermitteln?

Abgrenzung der Leistungsanalyse

Bislang: Effizienz- und Erfolgsanalyse (Aktivitätsanalyse)

Beschreibung und Bewertung von Produktionssystemen für **bekannte Input-Output-Relationen**

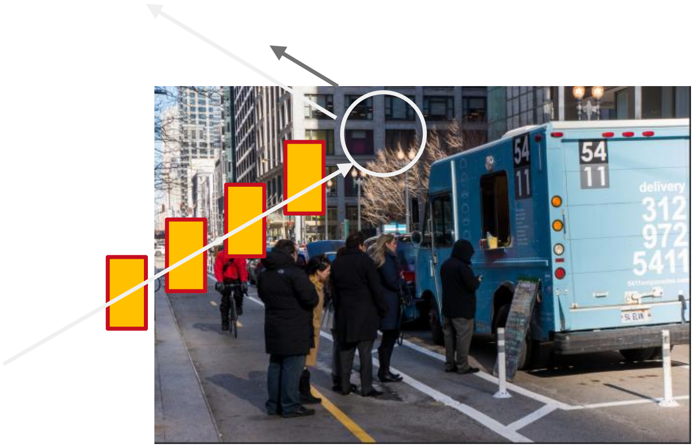
Erfolg?

Dominanz?

Effizienz?

Jetzt: Leistungsanalyse (Wartesysteme)

Beschreibung und Bewertung von Produktionssystemen bei **zufällig schwankenden Rahmenbedingungen**



Wartezeit?

Warteschlange?

Durchsatz?

https://www.maxpixel.net/Food-Truck-Cafe-Restaurant-Burger-Van-Hot-Dog-Van-1293505
https://www.flickr.com/photos/zolk/8389136757

Einige typische Fragen der Leistungsanalyse

In einem Brillen-Geschäft halten sich Kunden im Schnitt 90 Minuten auf. Pro Stunde kommen durchschnittlich 6 Kunden an. Mit wie vielen Personen gleichzeitig im Geschäft sollte der Optiker rechnen?

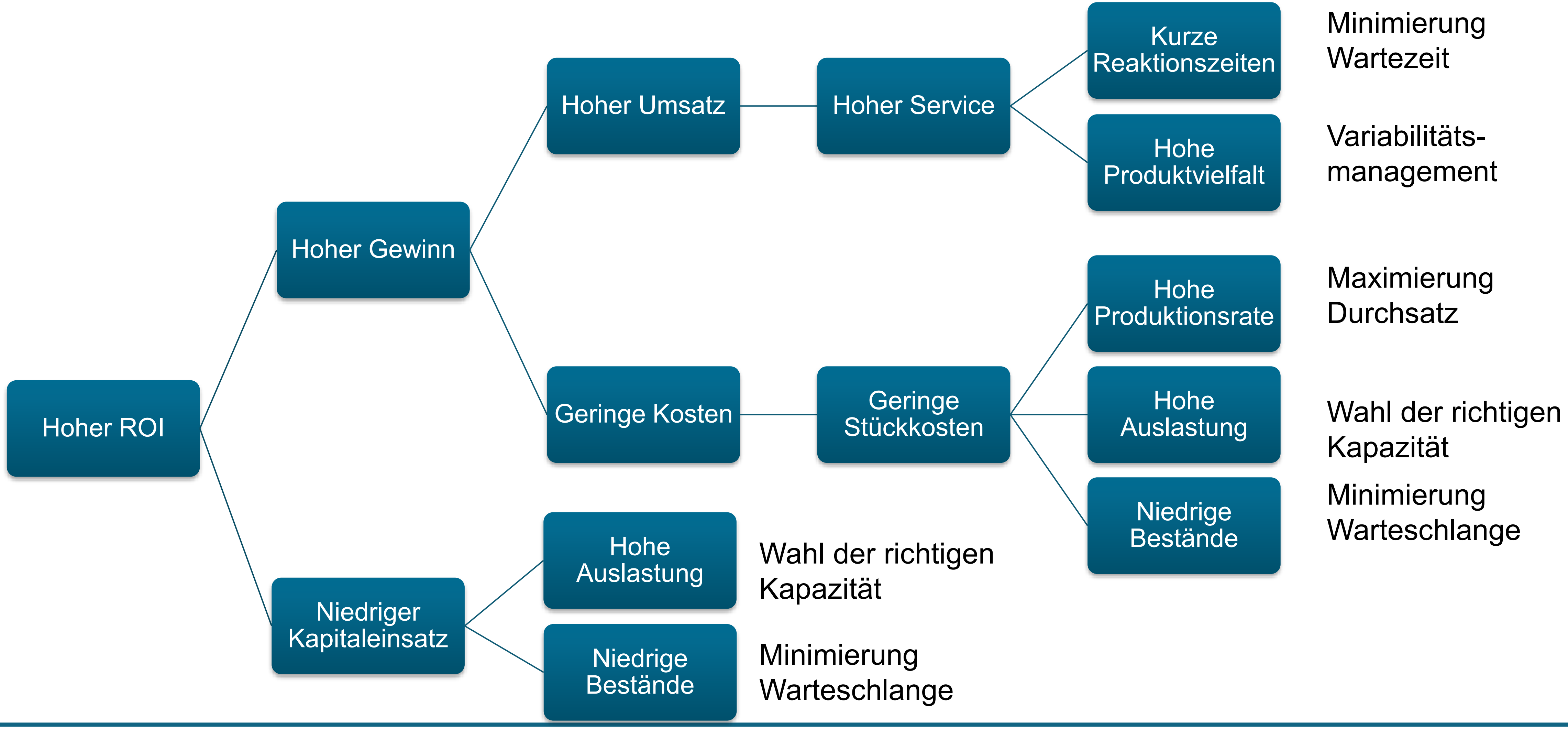
Was passiert bei sehr unterschiedlichen Dienstleistungen / Produkten?

Wie wirkt sich die Auslastungen auf die Ergebnisse aus?

Wie können die Wartezeiten reduziert werden?

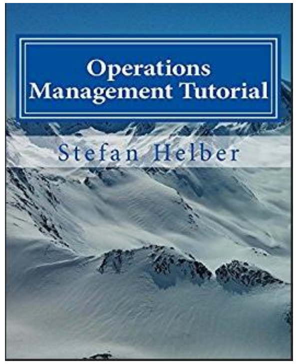
Eine Stanzmaschine verarbeitet 660 Bleche pro Stunde, jeweils einzeln. Es kommen 10 Bleche in der Minute an der Station an. Im Puffer vor der Maschine und in der Maschine befinden sich regelmäßig 100 Bleche. Wie lang ist die Liegezeit eines einzelnen Werkstücks vor der Bearbeitung?

Ökonomische Dimensionen der Leistungsanalyse

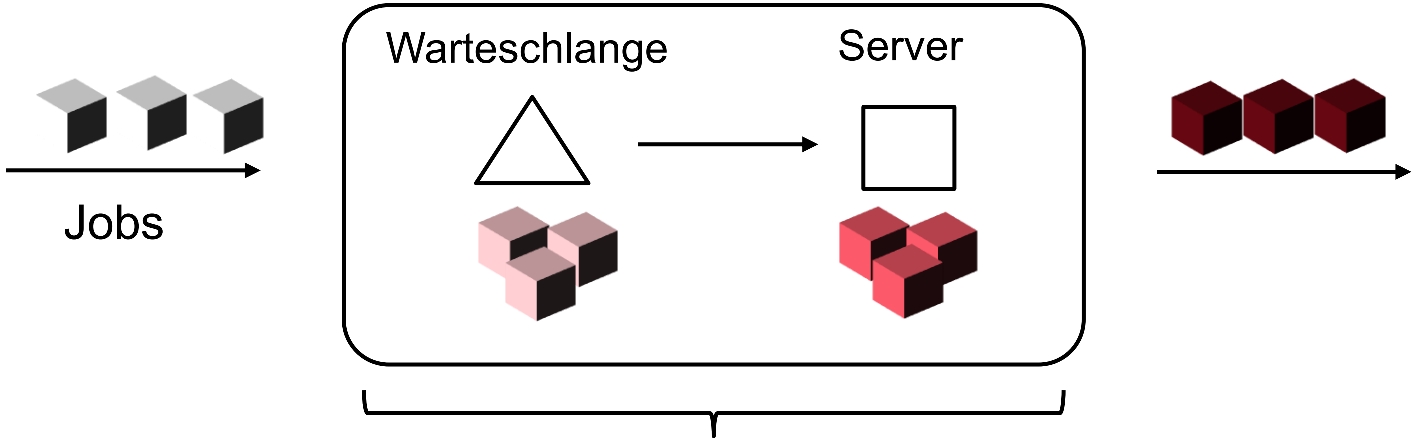


Agenda – Leistungsanalyse

- Wie können dynamische Produktionsprozesse modelliert werden? — *OMT Kapitel 1*
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Leistungsgrößen – das Gesetz von Little — *OMT Kapitel 2*
- Wie können die Leistungsgrößen ermittelt werden — *OMT Kapitel 3*
  - Vergleich dreier Wartesysteme
  - Die Kingman-Abschätzung (mit einem Server)
  - Betrachtung mehrerer Server
- Zusammenfassung



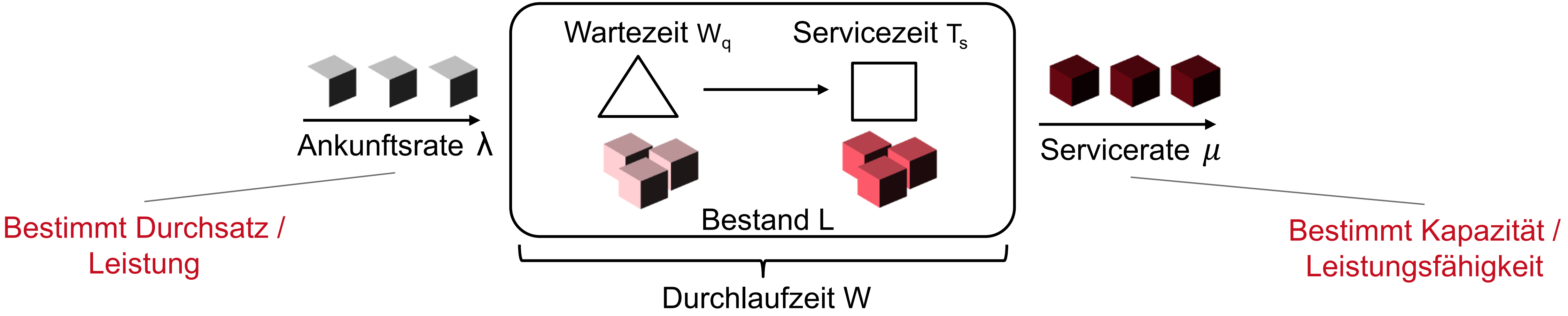
Der Produktionsprozess als Wartesystem



Produktionsprozess

Bildquellen :
http://www.qwergmbh.de/
http://www.gesundheitsstadt-berlin.de/wann-machen-krankenhaus- kooperationen-sinn-3972/ http://www.aero.de/news-14752/Lufthansa-streicht-Ticket-Servicegebuehr.html
http://www.user.tu-berlin.de/ivo.vorrath/

Wichtige Parameter von Wartesystemen



Bezeichnung	Symbol	Einheit	Beschreibung
Ankunftsrate	λ	Jobs/ZE	Durchsatz des Systems (auch: Leistung)
Servicezeit	T_s	ZE	Mittlere Bedien- bzw. Bearbeitungszeit
Wartezeit	W_q	ZE	Mittlere Zeit in der Warteschlange
Durchlaufzeit	W	ZE	Mittlere Aufenthaltszeit im System ($W = W_q + T_s$)
Bestand	L	Jobs	Mittlere Anzahl der Jobs im System
Servicerate	μ	Jobs/ZE	Kapazität des Systems (auch: Leistungsvermögen) [Jobs/ZE]

Ein 3D-Druckshop: Bestimmung der Parameter

Ankunftszeitpunkt
- Job k tritt ins System ein

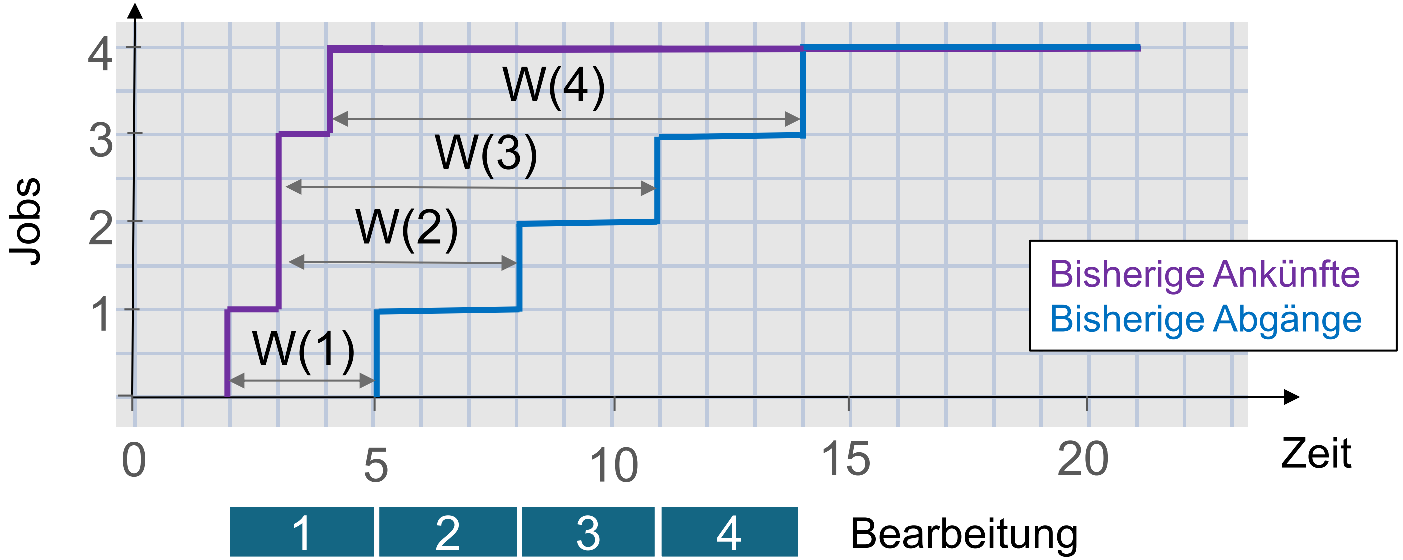
Zwischenankunftszeit
- Zeit zwischen Job-Ankunft und Vorgänger-Ankunft

Abgangszeitpunkt
- Job k verlässt das System

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Ankunftszeitpunkte	2	3	3	4
Servicezeiten T_s	3	3	3	3
Zwischenankunftszeiten T_a	2	1	0	1
Abgangszeitpunkte	5	8	11	14
Durchlaufzeit $W(k)$	3	5	8	10
Wartezeit W_q	0	2	5	7

z.B. Botspot GmbH

Geöffnet von 8-24 Uhr



Bildquelle.: http://www.heise.de

Ein 3D-Druckshop: Bestimmung der Parameter

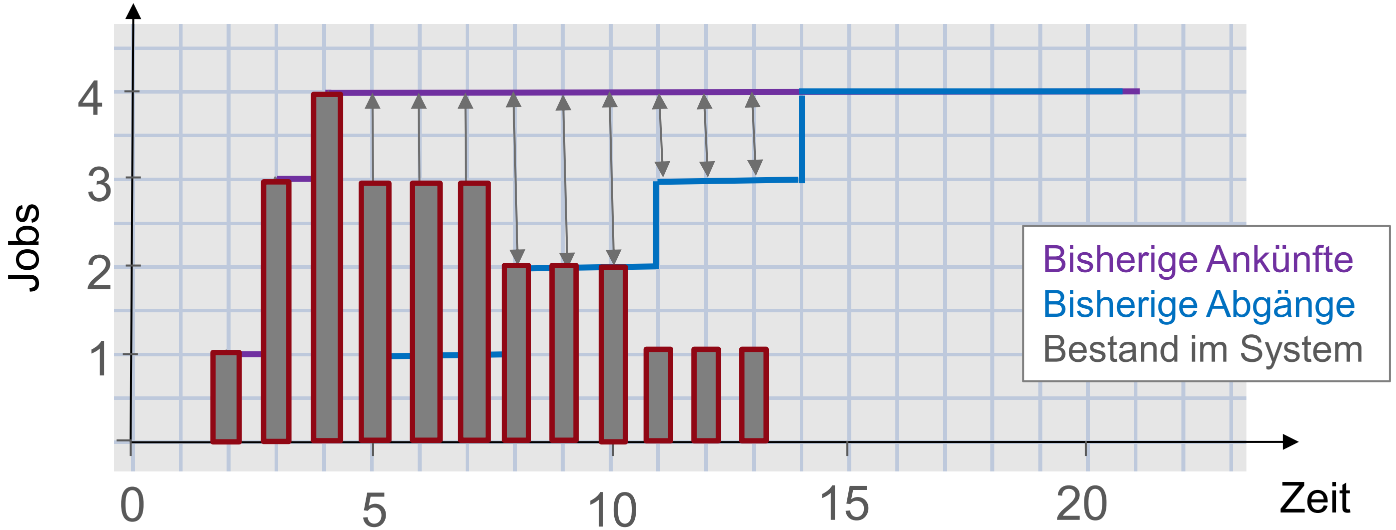
Ankunftszeitpunkt
- Job k tritt ins System ein

Zwischenankunftszeit
- Zeit zwischen Job-Ankunft und Vorgänger-Ankunft

Abgangszeitpunkt
- Job k verlässt das System

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Ankunftszeitpunkte	2	3	3	4
Servicezeit T_s	3	3	3	3
Abgangszeitpunkte	5	8	11	14

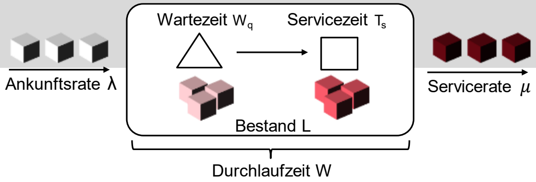
Wie groß ist der maximale Bestand?



z.B. Botspot GmbH

Geöffnet von 8-24 Uhr

Bildquelle.: http://www.heise.de



Ein 3D-Druckshop: Bestimmung der Parameter

Es gilt, wenn K Jobs das System innerhalb von T Zeiteinheiten durchlaufen

Mittlere Ankunftsrate

$$\lambda = \frac{K}{T}$$

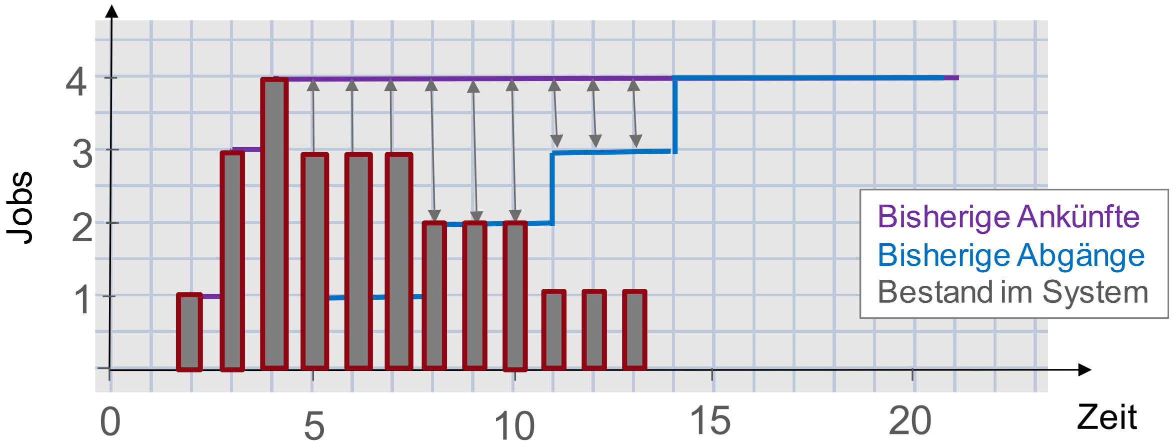
Mittlere Durchlaufzeit

$$W = \frac{\sum_{k=1}^{K} W_q(k) + T_s(k)}{K}$$

Mittlerer Bestand

$$L = \frac{\int_0^T Bestand(t)\ dt}{T}$$

$$\triangleq \frac{Fläche\ unter\ Graph}{T}$$



Anzahl Aufträge

$K = 4$ Jobs

Anzahl Stunden

$T = 16$ h

Geöffnet von 8-24 Uhr

Mittlere Ankunftsrate λ: $\frac{4}{16} = 0{,}25\ \text{Jobs/h}$

Mittlere Durchlaufzeit W: $\frac{3+5+8+10}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}5$ Std.

Mittlerer Bestand L: $\frac{0+1+3+4+3+3+3+2+2+2+1+1+1+0+0+0}{16} = \frac{26}{16}\text{Jobs} = 1{,}625\ \text{Jobs}$

Beobachtung:

L = λ · W
= 0,25 Jobs/h · 6,5 h
= 1,625 Jobs

Gesetz von Little

Agenda – Leistungsanalyse

- Wie können dynamische Produktionsprozesse modelliert werden?

- **Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Leistungsgrößen – das Gesetz von Little**

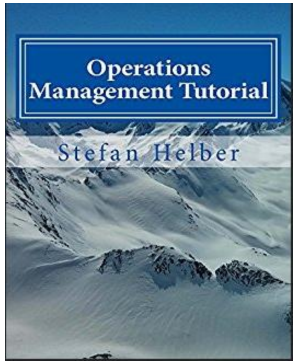
- Wie können die Leistungsgrößen ermittelt werden
  - Vergleich dreier Wartesysteme
  - Die Kingman-Abschätzung (mit einem Server)
  - Betrachtung mehrerer Server

- Zusammenfassung

OMT Kapitel 1

OMT Kapitel 2

OMT Kapitel 3

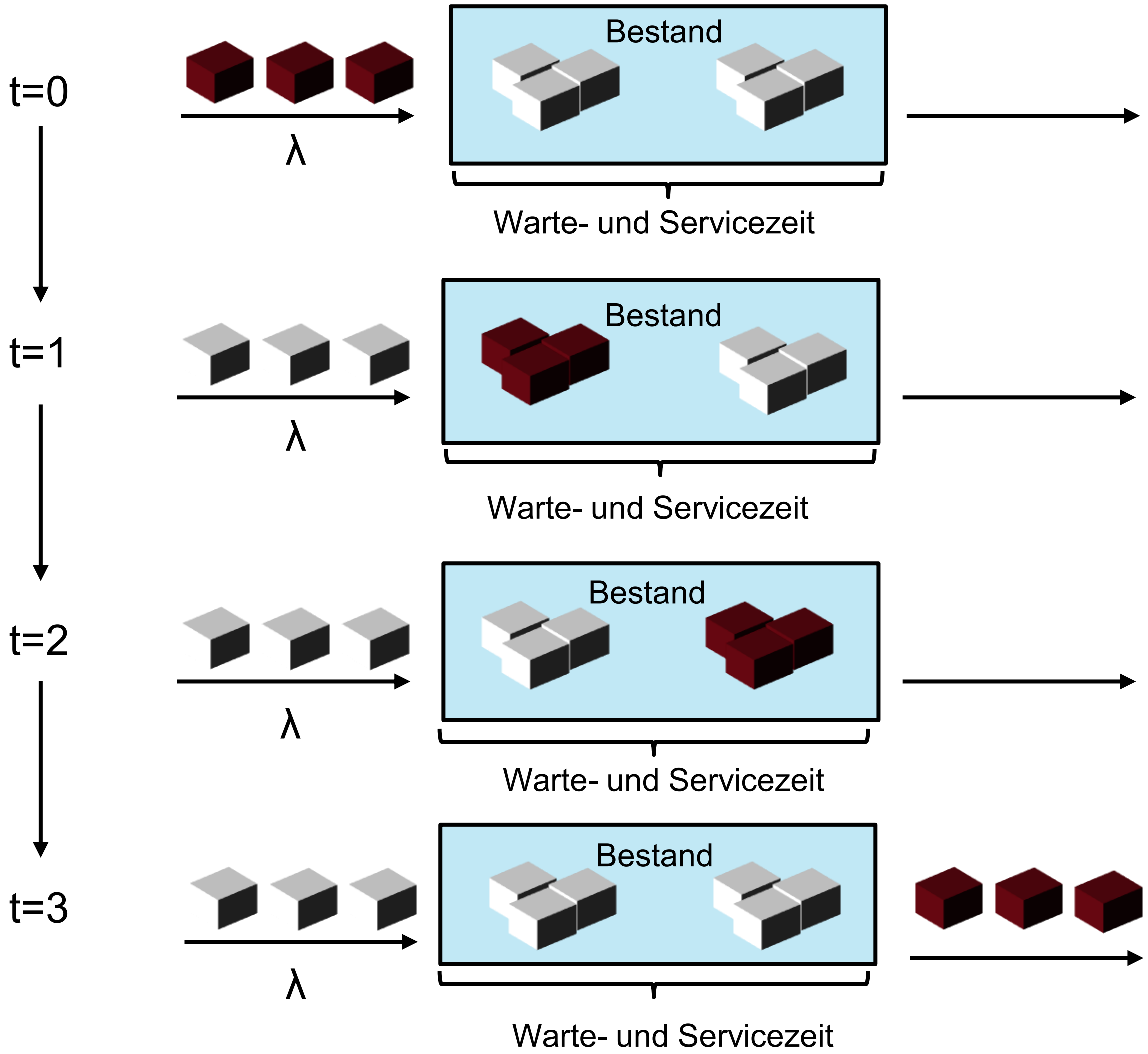


Eine intuitive Annäherung

$L = \lambda \cdot W$

Annahmen

Ankunftsrate: λ = 3 Jobs/h
Durchlaufzeit: W = 2 h



Durchschnittlicher Bestand

$$L = \lambda \cdot W = 3 \cdot 2 = 6$$

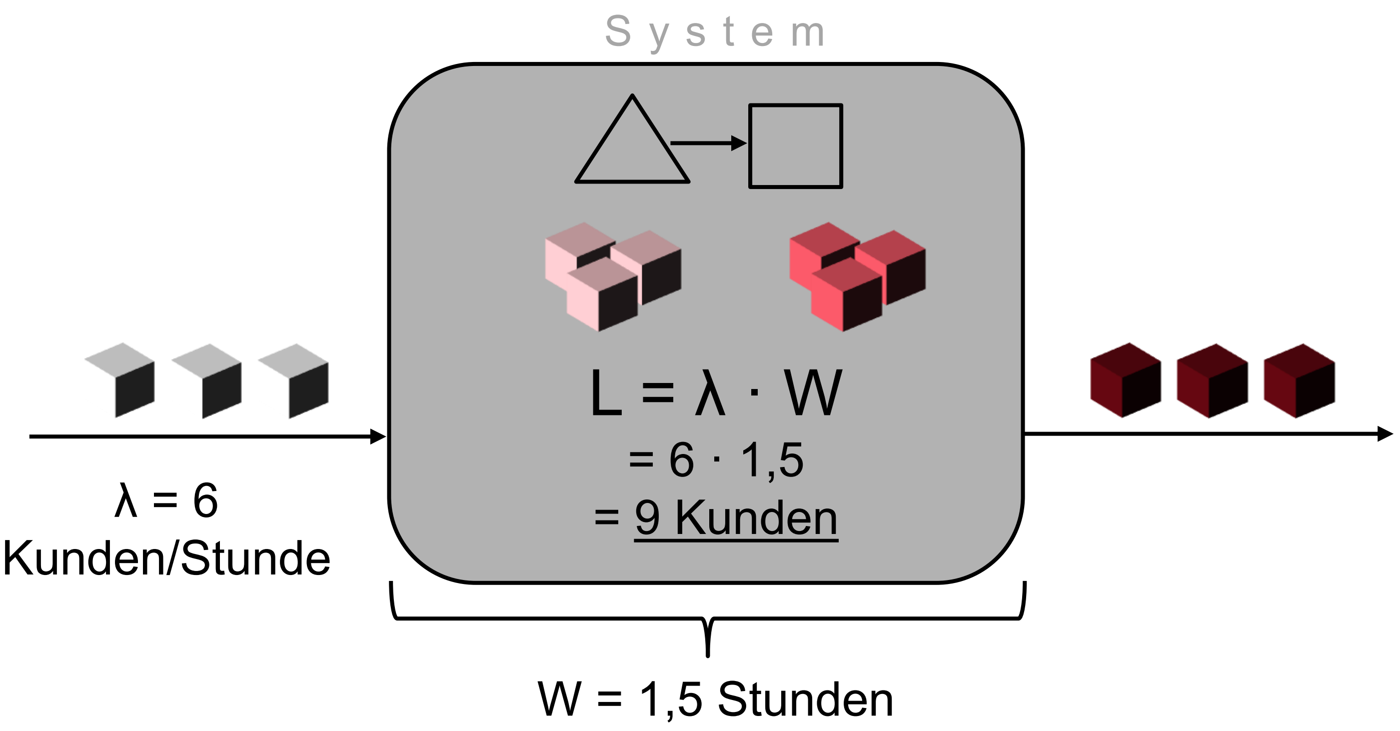
Das Gesetz von Little gilt auch bei stochastischen und komplexeren Systemen.

Anwendungsfall 1: Auslegung von Wartebereichen / Puffern

$L = \lambda \cdot W$

In einem Brillen-Geschäft halten sich Kunden im Schnitt 90 Minuten auf. Pro Stunde kommen durchschnittlich 6 Kunden an.

Mit wie vielen Personen gleichzeitig im Geschäft sollte der Optiker rechnen?



Anwendungsfall 2 – Berechnung von Wartezeiten

$L = \lambda \cdot W$

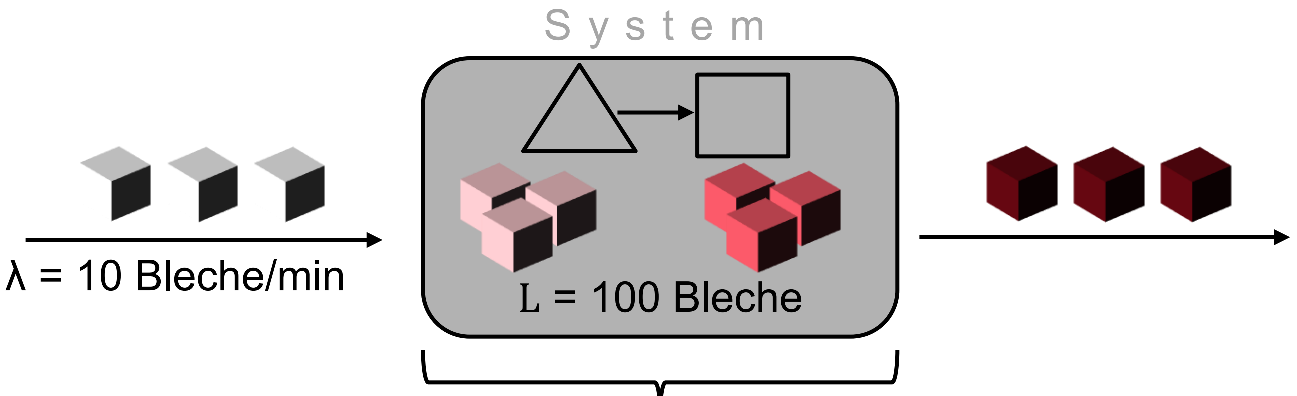
$W = W_q + T_s$

$W_q = W - T_s$

Eine Stanzmaschine verarbeitet 660 Bleche pro Stunde, jeweils einzeln. Es kommen 10 Bleche in der Minute an der Station an. Im Puffer vor der Maschine und in der Maschine befinden sich regelmäßig 100 Bleche.

Wie lang ist die Liegezeit eines einzelnen Werkstücks vor der Bearbeitung?

μ = 660 Bleche pro Stunde -> μ = 11 Bleche pro Minute -> T_s = 1/11 min



$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{100}{10} = 10 \text{ min}$$

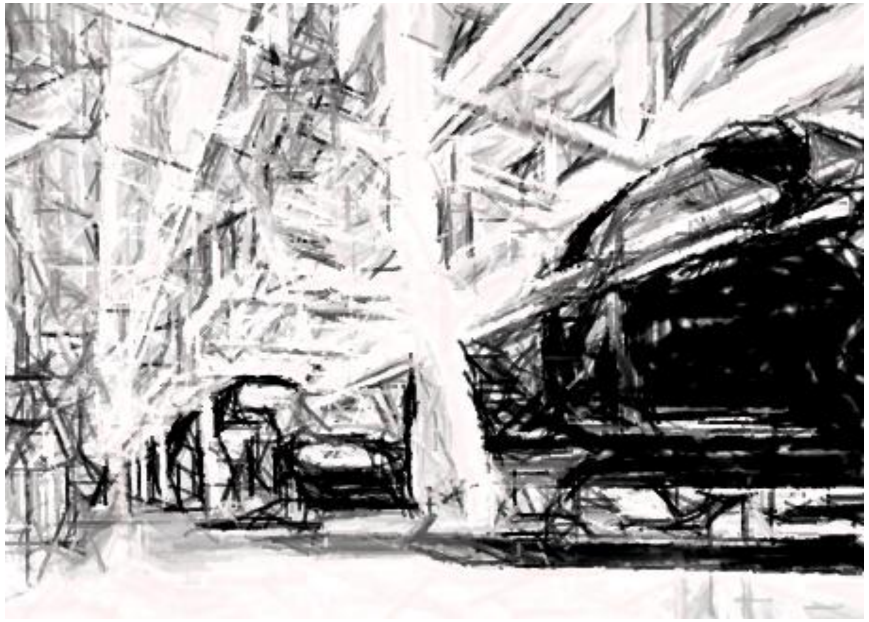
$$W_q = W - T_s = 10 - 1/11 = \text{ca. } 9{,}9 \text{ min}$$

Grenzen

- Sind neben der Ankunftsrate auch
  - die mittlere Durchlaufzeit **oder**
  - der mittlere Bestand bekannt,

  ist das Gesetz von Little ein universelles Werkzeug der Leistungsanalyse.

- **Herausforderung: für nicht existierende Systeme fehlen diese Informationen.**



Erweiterte Analyse erforderlich → wie lässt sich Durchlaufzeit analytisch berechnen?

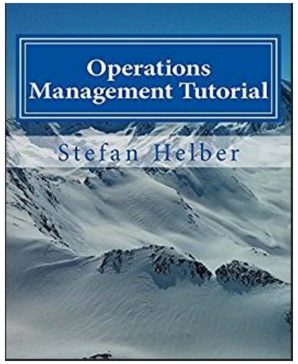
Agenda – Leistungsanalyse

- Wie können dynamische Produktionsprozesse modelliert werden?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Leistungsgrößen – das Gesetz von Little
- **Wie können die Leistungsgrößen ermittelt werden**
  - **Vergleich dreier Wartesysteme**
  - **Die Kingman-Abschätzung (mit einem Server)**
  - **Betrachtung mehrerer Server**
- Zusammenfassung

OMT Kapitel 1

OMT Kapitel 2

OMT Kapitel 3



Zusätzliche Parameter

- **Warteschlange**
  - begrenzt oder unbegrenzt

- **Ankunftsprozess**
  - λ — Ankunftsrate [Jobs je ZE]
  - $\mathrm{E}[T_a] = \frac{1}{\lambda}$ — Erwartete Zwischenankunftszeit [ZE]

- **Serviceprozess** (bei einem Server)
  - $\mu = 1/E[T\_s]$ — Servicerate [Jobs je ZE]
  - T_s — Zufällige Servicezeiten [ZE]
  - $\mathrm{E}[T_s]$ — Erwartete Servicezeit [ZE]

- **Wartesystem**
  - $\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$ — Auslastung [%]

Geöffnet von 8-24 Uhr

$\lambda = 0{,}25\ Jobs/h$

$\mathrm{E}[T_a] = 1/\lambda = 4\ h$

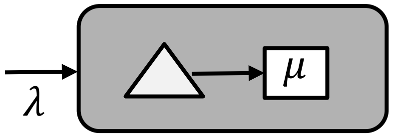
$\mu = 1/3 = 0{,}33\ \mathrm{Jobs/h}$

Servicezeit	3	3	3	3

$\mathrm{E}[T_s] = 3\ h$

$$\rho = \frac{3\mathrm{h}}{4\mathrm{h}} = 75\% = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{Jobs/h}}{\frac{1}{3}\mathrm{Jobs/h}}$$

Unser Ausgangsbeispiel – wie verändert sich die Auslastung?



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Vergleich Ausgangsszenario:

λ = 0,25 Jobs/h

μ = 0,33 Jobs/h

ρ = 75%

- Es kommen **5 statt 4 Kunden** am Tag

$$\lambda = \frac{5}{16} = 0{,}3125\ Jobs/h$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5/16}{1/3} = \frac{15}{16} = 93{,}75\%$$

- Die Druckdauer verlängert sich von **3 auf 4 Stunden**

$$\mathrm{E}[T_s] = 4\ h/Job$$

$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{4}{4} = 100\%$$

Geöffnet von 8-24 Uhr

Bildquelle.: http://heise.com

Quelle: OMT, Kapitel 2

Ein anderer 3D-Druckshop

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Ankunftszeitpunkte	1	5	9	13
Servicezeiten T_s	3	3	3	3
Zwischenankunftszeiten T_a	1	4	4	4
Abgangszeitpunkte	4	8	12	16
Durchlaufzeit W	3	3	3	3
Wartezeit W_q	0	0	0	0

Ankünfte gleichmäßig über Tag verteilt

Geöffnet von 8-24 Uhr

Vergleich Ausgangsszenario:

λ = 0,25 Jobs je Std.

μ = 0,33 Jobs je Std.

ρ = 75%

W = 6,5 Std.

L = 1,625 Jobs

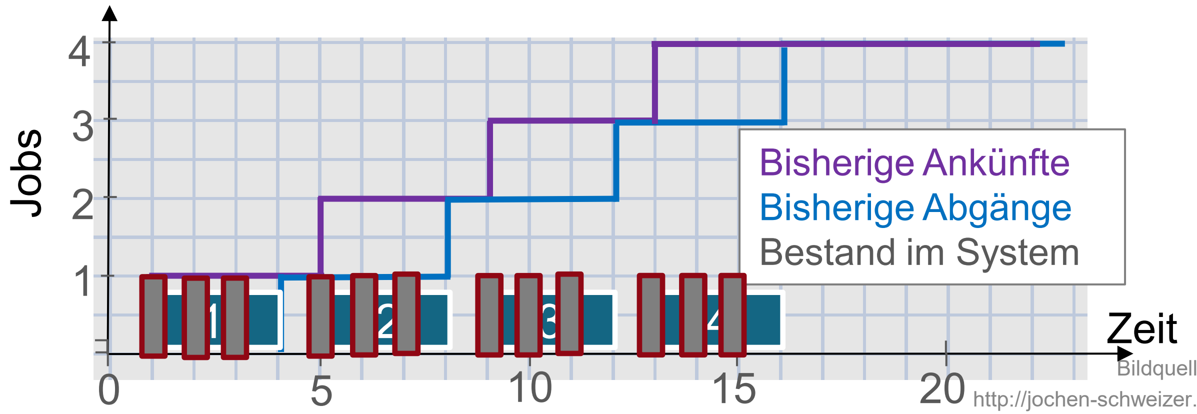
Ankunftsrate $\lambda = 4/16 = 0{,}25$ Jobs/h ✓

Servicerate μ $= 1/\mathrm{E}[T_s] = 0{,}33$ Jobs/h ✓

Auslastung ρ $= \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{3}{4} = 75\%$ ✓

$$\boxed{\begin{aligned} W &= (3+3+3+3)/4 = 3\ \mathrm{h} \\ L &= \frac{12}{16} = 0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75\ \mathrm{Jobs} \end{aligned}}$$

↘ ↘



Bildquelle.: http://jochen-schweizer.de

Der Dritte im Bunde

Bedienrate / Servicezeit

- $\mu = \frac{1}{E[T_s]}$

Auslastung

- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Vergleich Ausgangsszenario:

λ = 0,25 Jobs je Std.

μ = 0,33 Jobs je Std.

ρ = 75%

W = 6,5 Std.

L = 1,625 Jobs

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Ankunftszeitpunkte	2	3	3	4
Servicezeiten T_s	5	4	1	2
Zwischenankunftszeiten	2	1	0	1
Abgangszeitpunkte	7	11	12	14
Wartezeit Schlange W_q	0	4	8	8
Durchlaufzeit W	5	8	9	10

Unterschiedliche Servicezeiten

$$E[T_s] = \frac{5+4+1+2}{4} = 3$$

Geöffnet von 8-24 Uhr

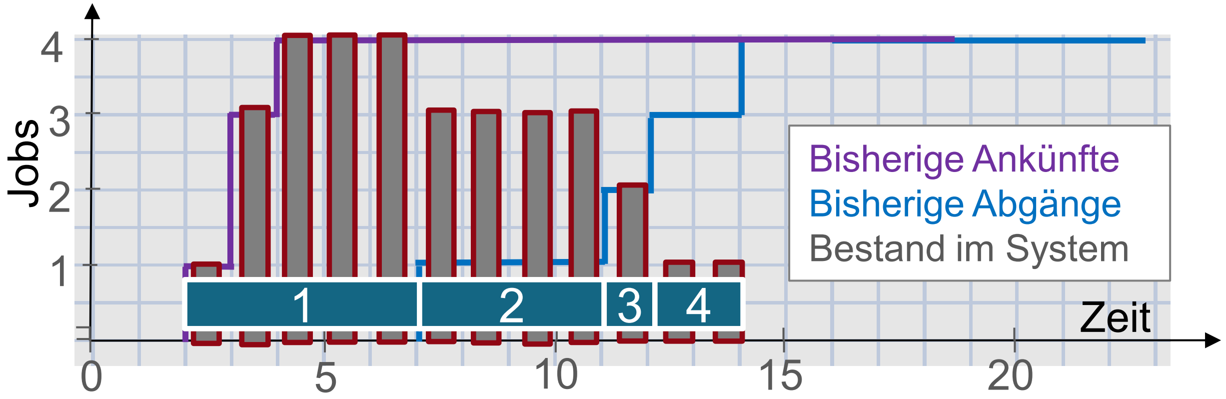
$\lambda = 0{,}25\ Jobs/h$ ✓

$\mu = 1/E[T_s] = 0{,}33\ Jobs/h$ ✓

$\rho = 75\%$ ✓

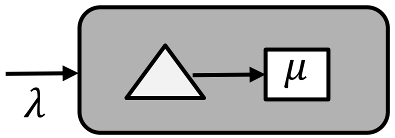
$\mathrm{W} = \frac{32}{4} = 8\ \mathrm{h}$ ↗

$\mathrm{L} = \frac{32}{16} = 0{,}25 \cdot 8 = 2\ \mathrm{Jobs}$ ↗



Bildquelle.:http://artsation.com

Vergleich dreier Wartesysteme



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

In allen drei „3D-Druckshop“ Wartesystemen:

- gleiche Ankunftsrate: 4 Jobs in 16 Std. -> λ = 0,25 Jobs je Stunde
- gleiche Servicerate: 4 Jobs in 12 Std. -> μ = 0,33 Jobs je Stunde
- gleiche Auslastung: 3/4 -> ρ = 75%

Deutliche Unterschiede in Wartezeiten und Beständen

- **Auslastung** bietet nicht genügend Information, um durchschnittliche Wartezeiten zu berechnen
- Wichtig ist auch die **Variabilität** der Zwischenankunftszeiten und der Servicezeiten!

Variabilität wird durch den **Variationskoeffizienten** beschrieben

$$c_x = \frac{Standardabweichung\ x}{Erwartungswert\ x} = \frac{\sigma_x}{\mathrm{E}[x]}$$

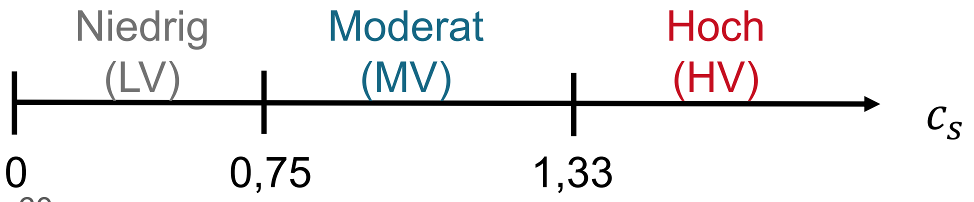
Variabilität der Zwischenankunftszeiten

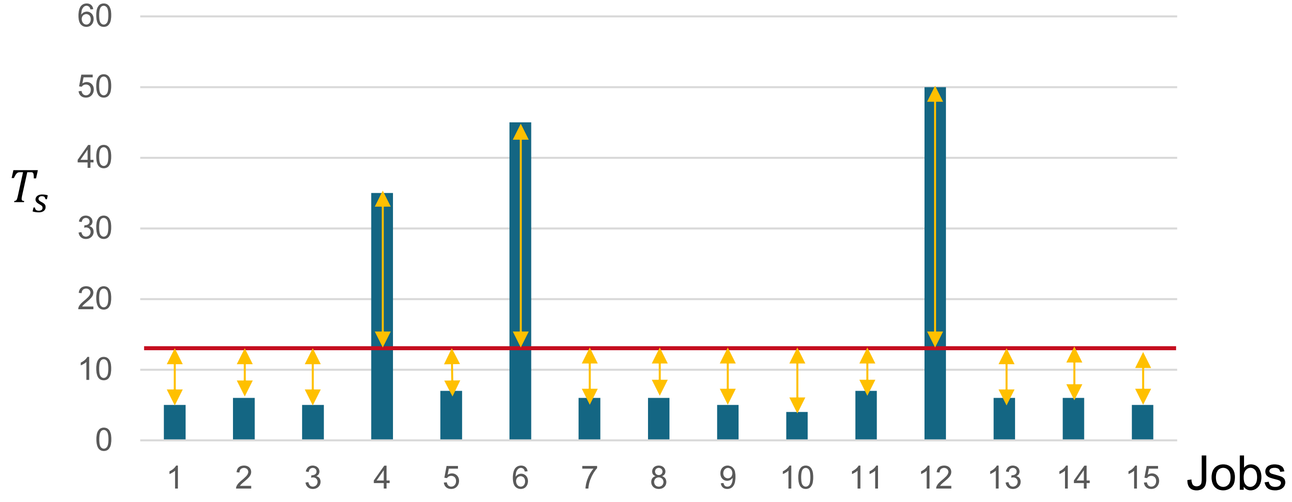
$$c_a = \frac{Standardabweichung\ T_a}{Erwartungswert\ T_a} = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

Variabilität der Servicezeiten

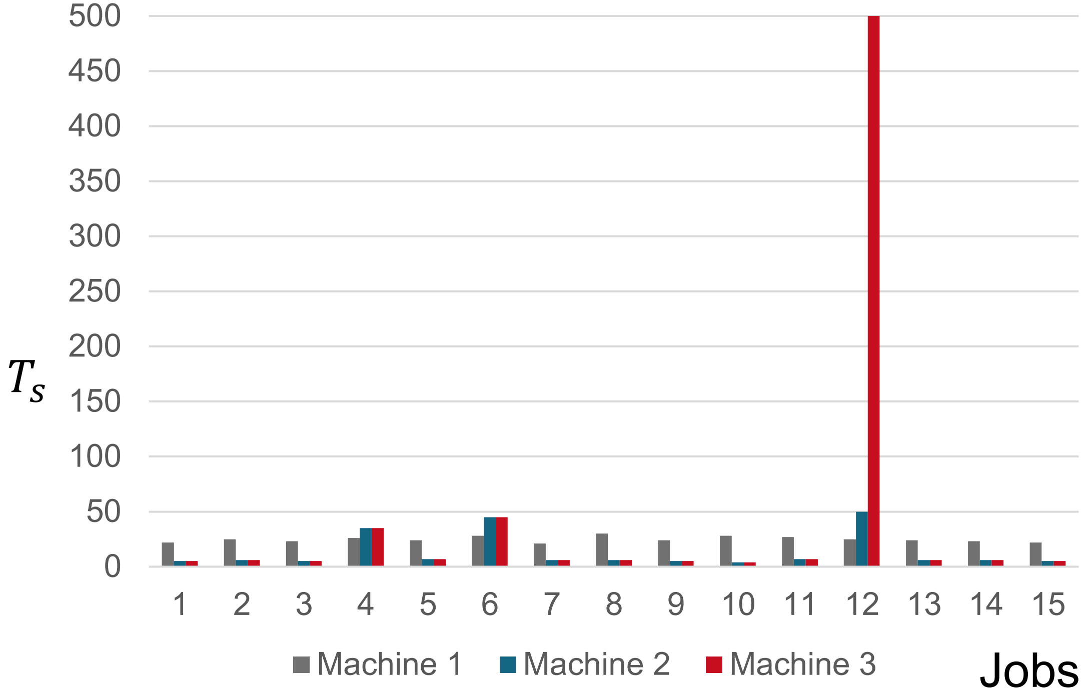
$$c_s = \frac{Standardabweichung\ T_s}{Erwartungswert\ T_s} = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

Klassifikation von Variabilität



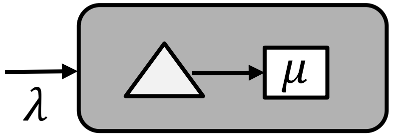


$\mathrm{E}[T_s] = 13$ $\sigma_{T_s} = 16$ $c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]} = 1{,}2$



Gesucht: Zusammenhang zwischen Variabilität und Leistungskennzahlen

Gesucht: W_q – Kingman-Abschätzung der Wartezeit



$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[T_s] = \frac{1}{\mu}$$

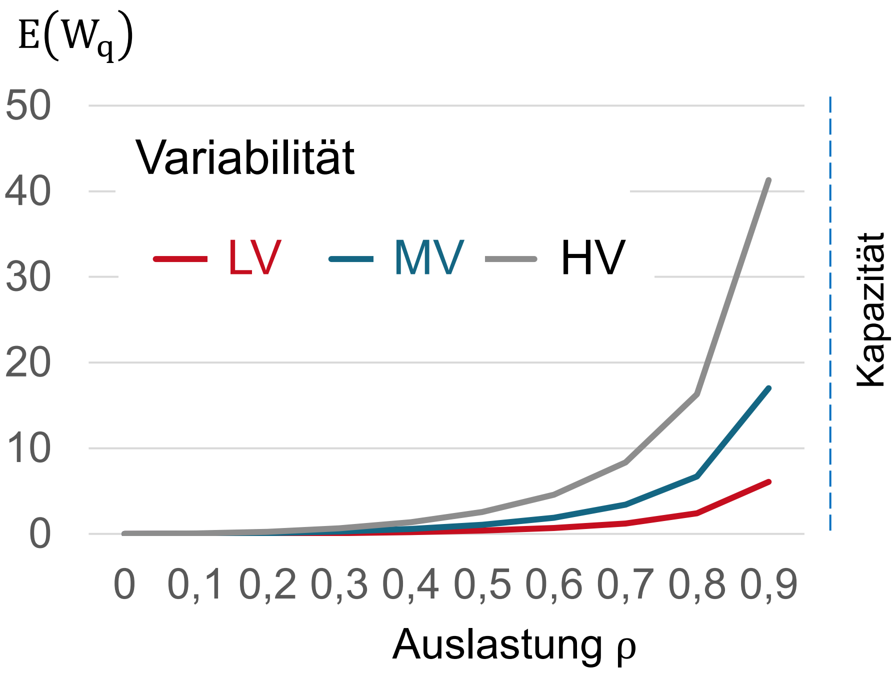
Berechnung der erwarteten Wartezeit im Warteraum:

$$\mathrm{E}(\mathrm{W_q}) \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu}$$

f(Variabilität)

f(Auslastung)

Erwartete Servicezeit



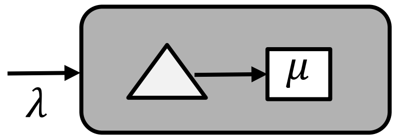
Annahmen:
- Ein Server
- Beliebige Verteilung der Zwischenankunfts- und Servicezeit
- Ankunftsrate ist kleiner als die Servicerate (Auslastung < 100%)
- Parameter sind zeitlich konstant
- Kein vorzeitiges Verlassen der Warteschlange
- Unbegrenzter Warteraum
- System ist im eingeschwungenen Zustand (langfristig stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten)

Quelle: OMT, Kapitel 2

Lösungsskizze für die Berechnung von Durchlaufzeit und Bestand

1. Berechne Parameter Ankunftsprozess (T_a, λ, c_a)
2. Berechnung Serverparameter (T_s, c_s, ρ)
3. Schätze **Wartezeit** W_q (Kingman)
4. Berechne **Durchlaufzeit** $W = W_q + t_s$
5. Berechne **Bestand** $L = \lambda \cdot W$ (Little)

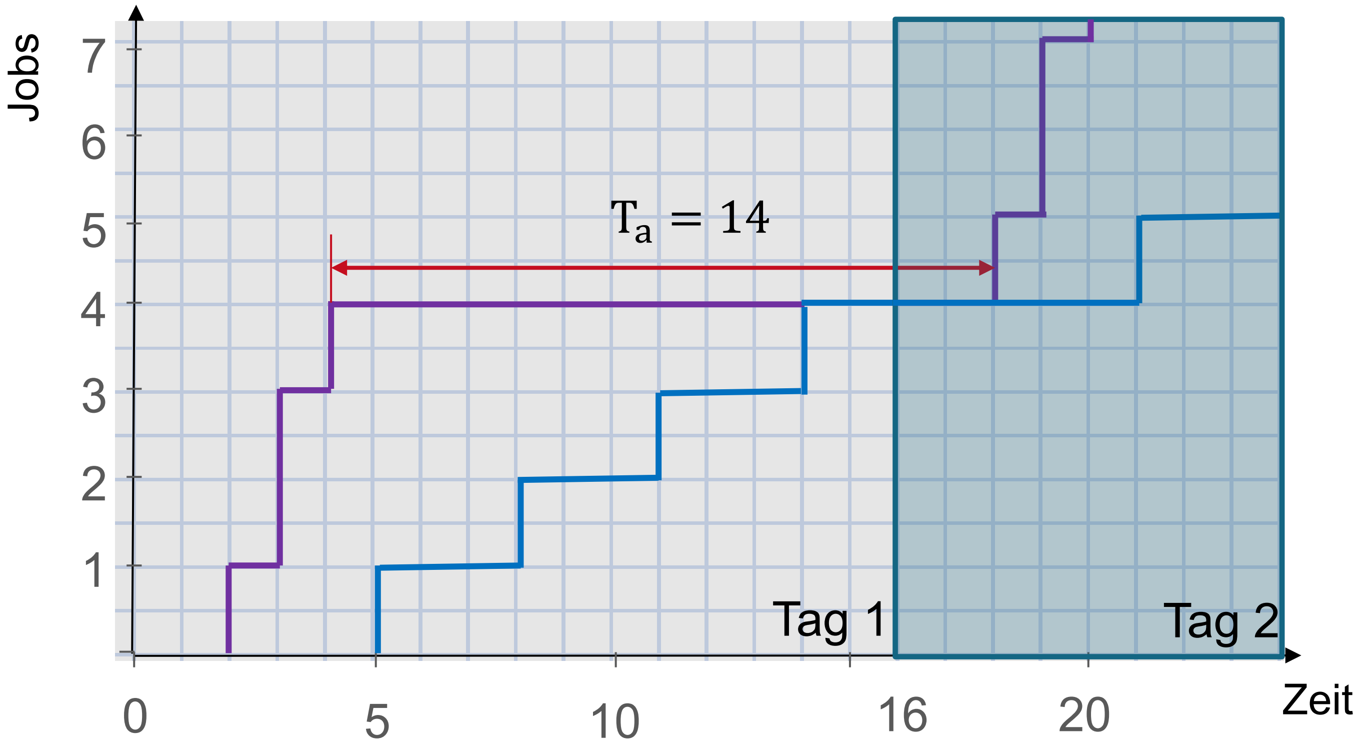
Unser Ausgangsbeispiel als langfristiges System



$$\rho = \frac{E[T_s]}{E[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4	…
Servicezeiten T_s	3	3	3	3	…
Zwischenankunftszeiten	14	1	0	1	…

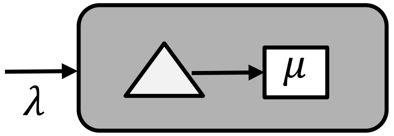
Tag 2



Geöffnet von 8-24 Uhr

Bisherige Ankünfte
Bisherige Abgänge
Bestand im System

Unser Ausgangsbeispiel als langfristiges System – Variabilität der Ankünfte



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

L = λ · W

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4	…
Servicezeiten T_s	3	3	3	3	…
Zwischenankunftszeiten T_a	14	1	0	1	…

Ankunftsrate: $\lambda = 0{,}25\ Jobs/h$

Erwartete Zwischenankunftszeit (Schätzung) $\mathrm{E}[T_a] = 4\mathrm{h/Job}$

Standardabweichung der Zwischenankunftszeit:

$$\sigma_{T_a} = \sqrt{\frac{(14-4)^2 + (1-4)^2 + (0-4)^2 + (1-4)^2}{4}} = 5{,}8\ h/Job$$

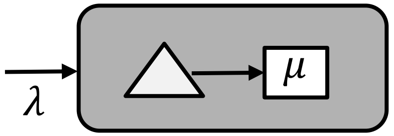
Variationskoeffizient der Zwischenankunftszeiten:

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{5{,}8\ \text{Std./Job}}{4\ \text{Std./Job}} = 1{,}45$$

HV

Bildquelle.: http://heise.com

Unser Ausgangsbeispiel als langfristiges System – Variabilität der Bearbeitung



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

L = λ · W

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4	…
Servicezeiten T_s	3	3	3	3	…
Zwischenankunftszeiten T_a	14	1	0	1	…

Erwartete Servicezeit (Schätzung): $\mathrm{E}[T_s] = 3\ h/Job$

Standardabweichung der Servicezeit: $\sigma_{T_s} = 0$

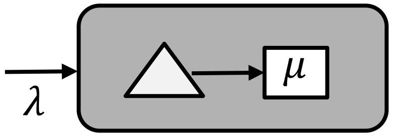
Variationskoeffizient der Servicezeit: $c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]} = \frac{0}{3\mathrm{h/Job}} = 0$

LV

Auslastung: $\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{3\ \mathrm{h/Job}}{4\ \mathrm{h/Job}} = 75\%$

Bildquelle.: http://heise.com

Unser Ausgangsbeispiel als langfristiges System



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

L = λ · W

Erwartete Wartezeit (Kingman-Abschätzung)

- $E[\mathrm{W_q}] \approx \frac{c_a^2+c_s^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{1{,}45^2+0}{2} \cdot \frac{0{,}75}{1-0{,}75} \cdot 3 \ = 9{,}5 \text{ h}$

Durchlaufzeit

- $\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s] = 9{,}5 + 3 = 12{,}5\ h$

Mittlerer Bestand

- $\mathrm{L} = \lambda \cdot \mathrm{W} = 0{,}25 \text{ Jobs/h} \cdot 12{,}5 \text{ Std.} \approx 3{,}1 \text{ Jobs}$

Berechnung am Beispiel:

W = 6,5 Std.

L = 1,625 Jobs

Annahmen:
- Ein Server
- Beliebige Verteilung der Zwischenankunfts- und Servicezeit
- Ankunftsrate ist kleiner als die Servicerate
- Parameter sind zeitlich konstant
- Unbegrenzter Warteraum
- System ist im eingeschwungenen Zustand
- Kein vorzeitiges Verlassen der Warteschlange

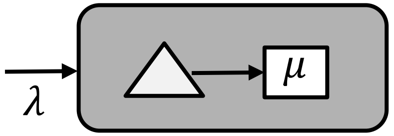
Simulierter Wert:

W = 12 h

L = 3 Jobs

Quelle: OMT, Kapitel 3

3D-Druckshop 2: gleichmäßige Kundenankünfte



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \, \frac{\rho}{1-\rho} \, \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

L = λ · W

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4	…
Servicezeiten T_s	3	3	3	3	…
Zwischenankunftszeiten	14	1	0	1	…

Servicezeiten T_s	3	3	3	3	…
Zwischenankunftszeiten	4	4	4	4	…

Servicezeiten T_s	5	4	1	2	…
Zwischenankunftszeiten	14	1	0	1	…

Ankunftsrate λ: 0,25 Jobs je Stunde (von 4 Jobs/Tag)

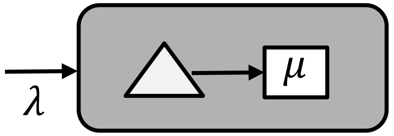
Standardabweichung der Zwischenankunftszeiten: σ_{T_a} = 0 Std. Reduzierte Variabilität

Mittlere Servicezeit: $\mathrm{E}[T_s]$ = 3 Stunden

Standardabweichung der Servicezeit: σ_{T_s} = 0

Bildquelle.:
http://heise.com
Quelle: OMT, Kapitel 2

3D-Druckshop 2: gleichmäßige Kundenankünfte



$$\rho = \frac{E[T_s]}{E[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$E[W] = E[W_q] + E[T_s]$$

L = λ · W

Zwischenankunftszeiten

$\lambda =$ 0,25 Jobs je Std. $\rightarrow E[T_a] =$ 4 Std.

$\sigma_{T_a} =$ 0 Std.

$$\boxed{c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} = \frac{0\text{ Std.}}{4\text{ Std.}} = 0}$$

LV

Servicezeiten

$E[T_s] =$ 3 Std.

$\sigma_{T_s} =$ 0

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]} = \frac{0}{3\text{ Std.}} = 0$$

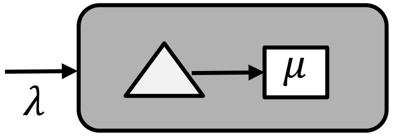
LV

Auslastung

$$\rho = \frac{E[T_s]}{E[T_a]} = \frac{3\text{ Std.}}{4\text{ Std.}} = 75\ \%$$

Quelle: OMT, Kapitel 3

3D-Druckshop 2: gleichmäßige Kundenankünfte



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

L = λ · W

Erwartete Wartezeit (Kingman-Abschätzung)

- $E[W_q] \approx \frac{c_a^2+c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu} = \frac{0+0}{2} \frac{0.75}{1-0.75}\ 3 = 0 \cdot 3 \cdot 3 \approx 0\ \mathrm{h}$

Summe aus Warte- und Servicezeit (= Zeit im System)

- $\mathrm{E}[W] = E[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$= 0 Std.+ 3 Std. = 3 Std.

Mittlere Anzahl an Jobs

- L = λ · W = 0,25 Jobs je Std.· 3 Std. ≈ 0,75 Jobs

< Ausgangsfall: 3,1 Jobs

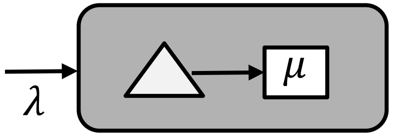
Berechnung am Beispiel:

W = 3 Std.

L = 0,75 Jobs

Quelle: OMT, Kapitel 3

3D-Druckshop 3: schwankende Bearbeitungszeiten



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

L = λ · W

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4	…
Servicezeiten T_s	3	3	3	3	…
Zwischenankunftszeiten	14	1	0	1	…

Servicezeiten T_s	3	3	3	3	…
Zwischenankunftszeiten	4	4	4	4	…

Servicezeiten T_s	5	4	1	2	…
Zwischenankunftszeiten	14	1	0	1	…

Ankunftsrate λ: 0,25 Jobs je Stunde (von 4 Jobs/Tag)

Standardabweichung der Zwischenankunftszeiten: σ_{T_a} = 5,8 Std.

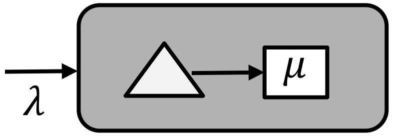
Mittlere Servicezeit: $\mathrm{E}[T_s]$ = 3 Stunden

Erhöhte Variabilität

Standardabweichung der Servicezeit: $\boxed{\sigma_{T_s} = 1{,}6 \text{ Std.}}$

Bildquelle.:
http://heise.com
Quelle: OMT, Kapitel 2

3D-Druckshop 3: schwankende Bearbeitungszeiten



$$\rho = \frac{E[T_s]}{E[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{E[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$E[W] = E[W_q] + E[T_s]$$

L = λ · W

Zwischenankunftszeiten

$\lambda =$ 0,25 Job je Std. $\rightarrow E[T_a] =$ 4 Std.

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{E[T_a]} \approx \frac{5{,}8\text{ Std.}}{4\text{ Std.}} \approx 1{,}45$$

Servicezeiten

$E[T_s] =$ 3 Std.

$\sigma_{T_s} =$ 1,6 Std.

$$\boxed{c_s = \frac{\sigma(T_s)}{E[T_s]} = \frac{1{,}6\text{ Std.}}{3\text{ Std.}} = 0{,}53}$$

Auslastung

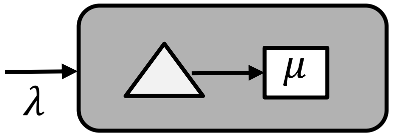
$$\rho = \frac{E[T_s]}{E[T_a]} = \frac{3\text{ Std.}}{4\text{ Std.}} = 75\ \%$$

HV

LV

Quelle: OMT, Kapitel 3

3D-Druckshop 3: schwankende Bearbeitungszeiten



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

L = λ · W

Erwartete Wartezeit (Kingman-Abschätzung)

- $\mathrm{E}[W_q] \approx \frac{c_a^2+c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu} \approx \frac{1{,}45^2+0.53^2}{2} \frac{0{,}75}{1-0{,}75}\ 3 \approx 10{,}7\ \mathrm{h}$

Summe aus Warte- und Servicezeit (= Zeit im System)

- $\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$= 10,7 + 3 = 13,7 h

Mittlere Anzahl an Jobs

L = λ · W = 0,25 · 13,7 ≈ 3,4 Jobs > Ausgangsfall: 3,1 Jobs

Berechnung am Beispiel:

W = 8 h

L = 2 Jobs

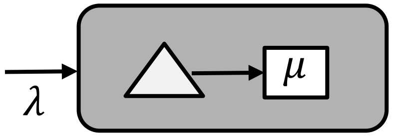
Simulierter Wert:

W = 13 h

L ≈ 3,33 Jobs

Quelle: OMT, Kapitel 3

Erkenntnisse der Abschätzung



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

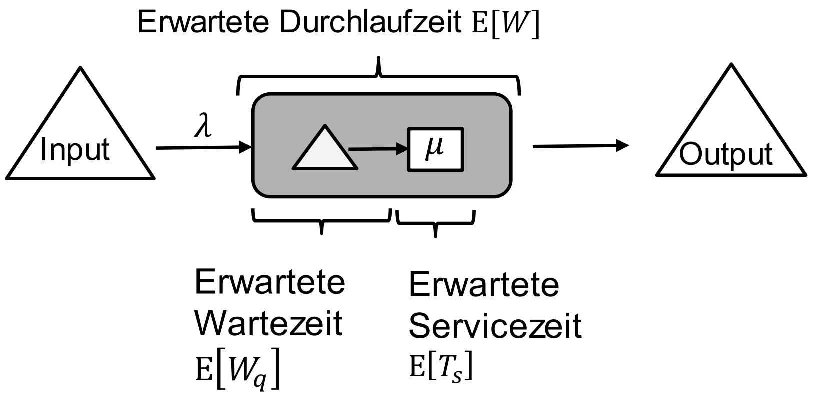
$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

$L = \lambda \cdot W$

- In der Kombination von **Kingman-Abschätzung** und **Formel von Little** lassen sich **Wartezeiten**, **Durchlaufzeiten** und **Bestände** im eingeschwungenen Zustand berechnen

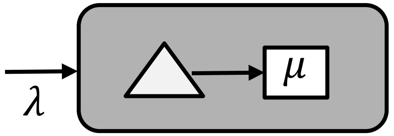
- Durchlaufzeiten und Bestände steigen, wenn
  - die Variabilität (Ankünfte oder Bearbeitung) steigt,
  - die Auslastung steigt,
  - die erwartete Servicezeit steigt.



- Berechne Parameter Ankunftsprozess (T_a, c_a,)
- Berechnung Serverparameter (T_s, c_s, ρ)
- Schätze Wartezeit W_q (Kingman)
- Berechne Durchlaufzeit $W = W_q + t_s$
- Berechne Bestand $L = \lambda \cdot W$ (Little)

Quelle: OMT, Kapitel 2

Grenzen der Abschätzung



$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{\mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{\mu}$$

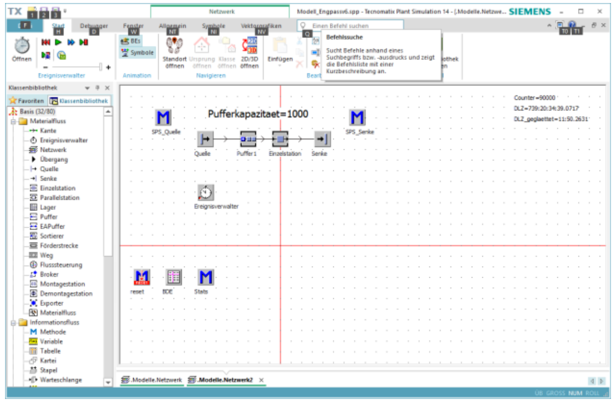
$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}$$

$$c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$\mathrm{E}[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$

- Annahmen bestimmen die Grenzen der Abschätzung!
  - Ankunftsrate ist kleiner als die Servicerate
  - **Unbegrenzter Warteraum**
  - **Parameter sind zeitlich konstant**
  - **Kein vorzeitiges Verlassen der Warteschlange**
  - **System ist im eingeschwungenen Zustand**
  - **Ein Server**
- Analyse von komplexen Produktionssystemen mittels Simulation



Agenda – Leistungsanalyse

- Wie können dynamische Produktionsprozesse modelliert werden?

OMT Kapitel 1

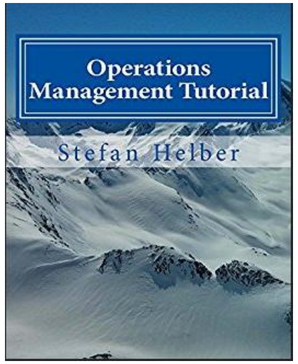
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Leistungsgrößen
  - das Gesetz von Little

OMT Kapitel 2

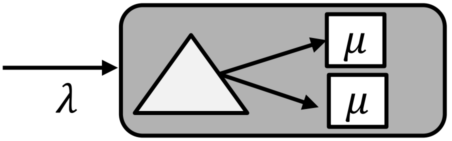
- Wie können die Leistungsgrößen ermittelt werden
  - Vergleich dreier Wartesysteme
  - Die Kingman-Abschätzung (mit einem Server)
  - **Betrachtung mehrerer Server**

OMT Kapitel 3

- Zusammenfassung

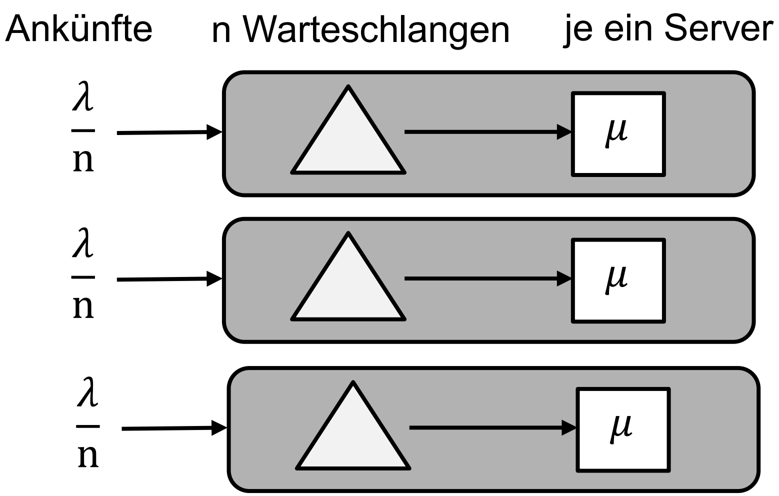


Getrennte vs. gemeinsame Schlangen



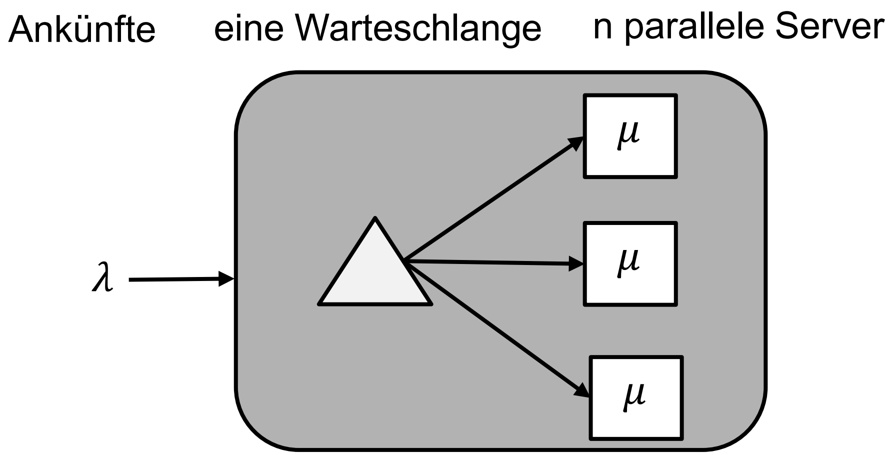
n Server

- **Getrennte Warteschlangen**



$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{\mu}$$

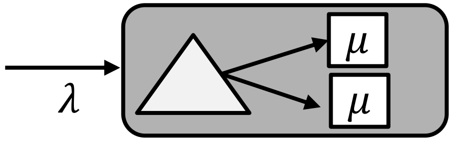
- **Gemeinsame Warteschlange**



$$E[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho^{\sqrt{2(n+1)}-1}}{n \cdot (1-\rho)} \frac{1}{\mu}$$

Quelle: OMT, Kapitel 3

Getrennte vs. gemeinsame Schlangen



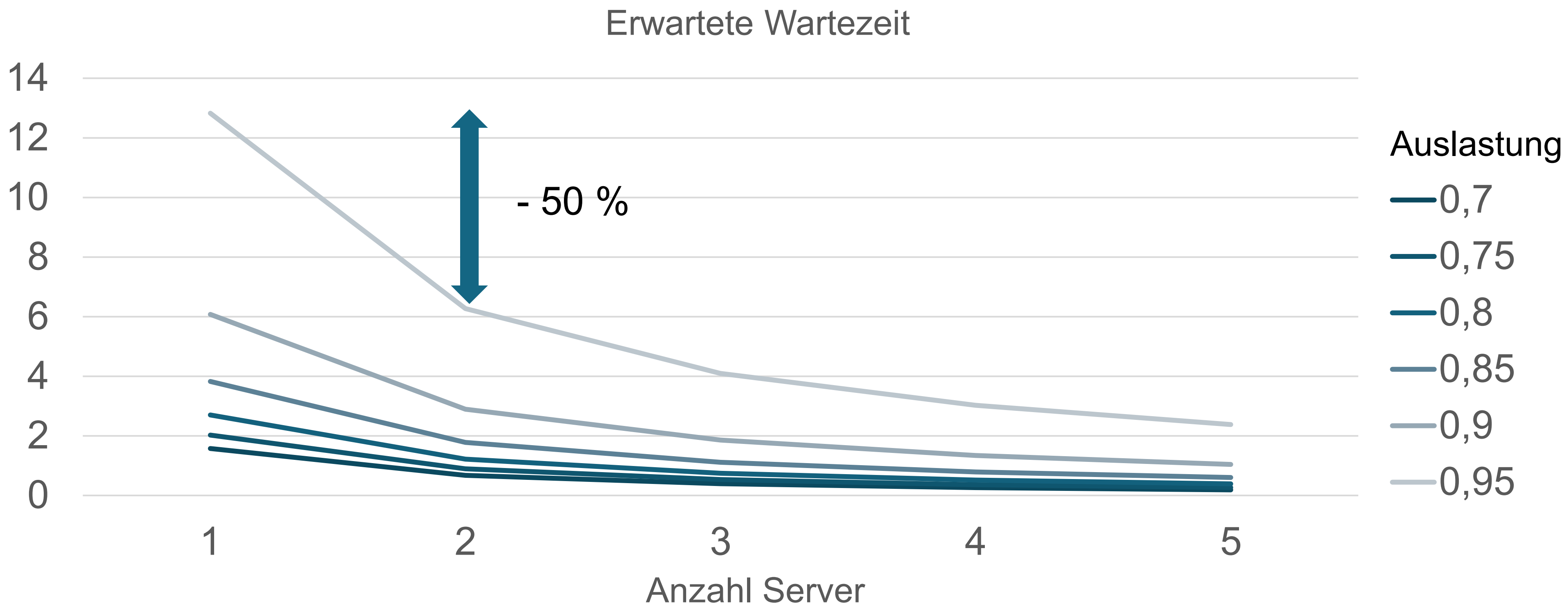
n Server

$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{n \cdot \mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}, c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

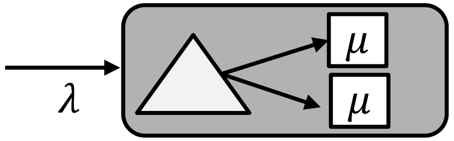
$$\mathrm{E}[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho^{\sqrt{2(n+1)}-1}}{n \cdot (1-\rho)} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$



Wartezeit nimmt mit Anzahl der Server bei einer gemeinsamen Schlange ab

Wo wird das angewendet?



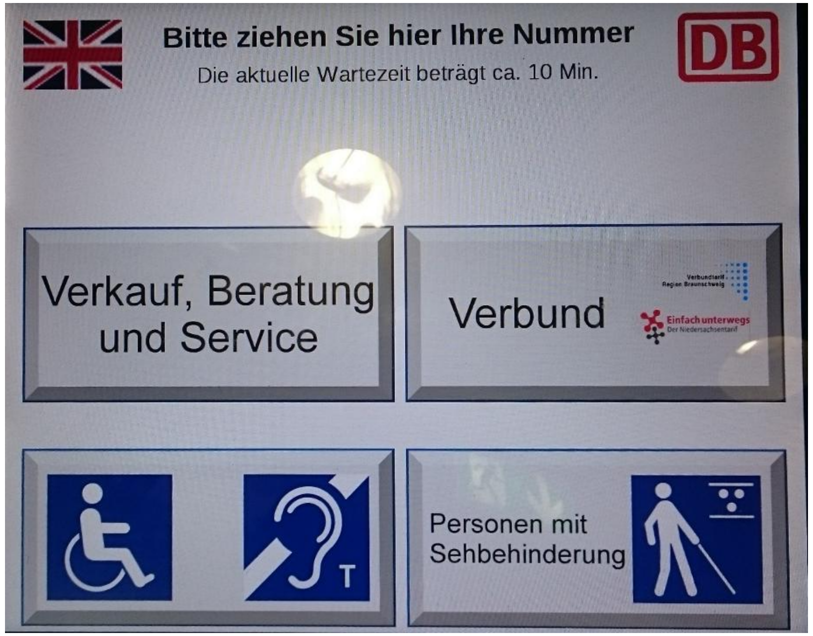
n Server

$$\rho = \frac{\mathrm{E}[T_s]}{n \cdot \mathrm{E}[T_a]} = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$$

$$c_a = \frac{\sigma_{T_a}}{\mathrm{E}[T_a]}, c_s = \frac{\sigma_{T_s}}{\mathrm{E}[T_s]}$$

$$\mathrm{E}[W_q] \approx \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} \frac{\rho^{\sqrt{2(n+1)}-1}}{n \cdot (1-\rho)} \frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}[W_q] + \mathrm{E}[T_s]$$



Zusammenfassung

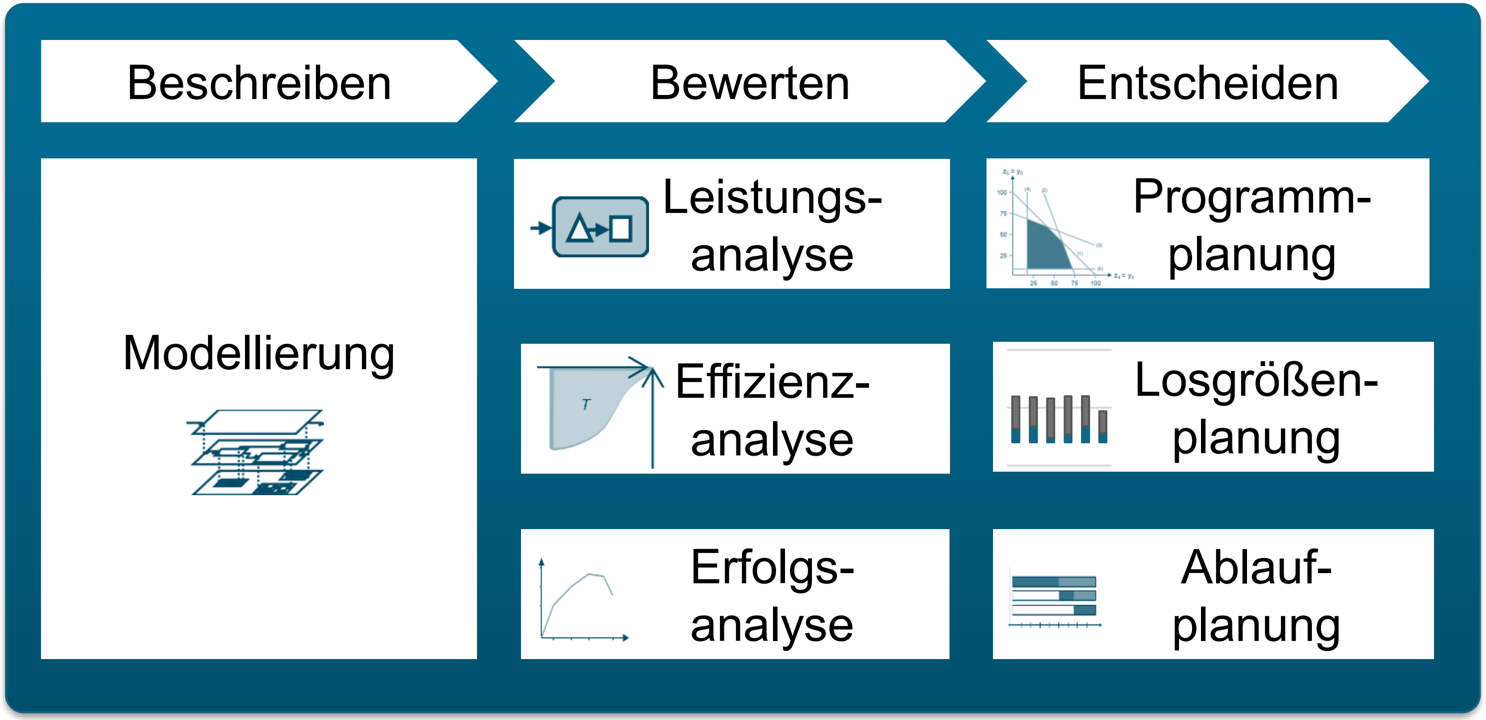
- Das Gesetz von Little stellt eine Beziehung zwischen der **Ankunftsrate λ**, dem **mittleren Bestand L** und der **mittleren Durchlaufzeit W** her.
- Viele Wertschöpfungsprozesse lassen sich als Wartesystem beschreiben.
- Haupttreiber von Wartezeiten und Beständen:
  - Variabilität der Ankünfte oder Bearbeitungszeiten,
  - Auslastung,
  - erwartete Servicezeiten,
  - Anzahl der Server.
- Wartezeit bei einer gemeinsamen Schlange mit *n* Servern ist nie länger als bei *n* getrennten Schlangen mit jeweils einem Server (unter gleichen sonstigen Bedingungen).

Wie wirkt sich die Auslastungen auf die Ergebnisse aus?

Was passiert bei sehr unterschiedlichen Dienstleistungen / Produkten?

Wie können die Wartezeiten reduziert werden?

Wie geht es weiter?



Nachbereitungsmöglichkeiten:

- Besuch der Übung
- Online Quiz
- Besuch der Tutorien
- Buch und Videos Kapitel 1-3

Fakultät VII Wirtschaft & Management
Fachgebiet Industrielles Produktions- und Dienstleistungsmanagement
Prof. Dr. Thomas Volling

Photo by Johann Walter Bantz on Unsplash

http://pom.tu-berlin.de