Teil A

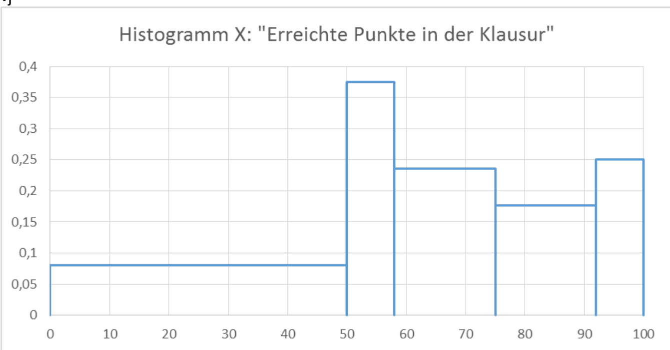
1) X ~ kardinal, Verhältnisskala
   diskret (in ganzen Punkten)
   (quasi-)stetig (wegen feiner Rasterung)

   Y ~ ordinal

2) X: gruppierte Daten

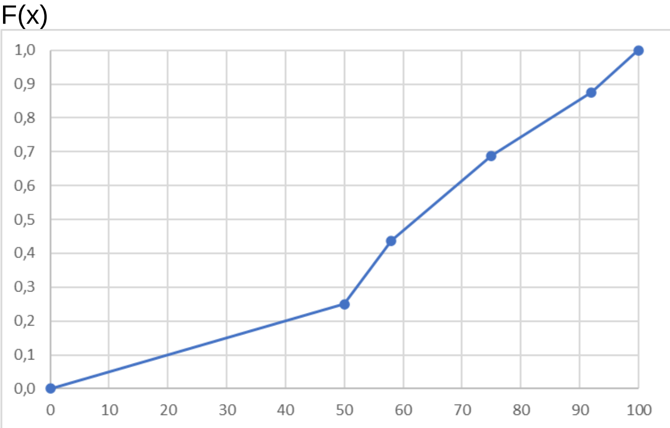
g_{j-1}	g_j	h_j	f_j	F(x)	H(x)	$b_j = g_j - g_{j-1}$	$\tilde{f}_j = \frac{h_j}{b_j}$ empirische Dichte
0	50	4	4/16 = 0,2500	0,2500	4	50 - 0 = 50	4/50 = 0,0800
50	58	3	3/16 = 0,1875	0,4375	7	58 – 50 = 8	3/ 8 = 0,3750
58	75	4	4/16 = 0,2500	0,6875	11	75 – 58 = 17	4/17 = 0,2353
75	92	3	3/16 = 0,1875	0,8750	14	92 – 75 = 17	3/17 = 0,1765
92	100	2	2/16 = 0,1250	1,0000	16	100 – 92 = 8	2/ 8 = 0,2500
Σ		**16**	**1,0000**		**100**		

$\tilde{f}_j$



Punkte $\tilde{f}(x) = \frac{dF}{dx}(x)$

F(x)

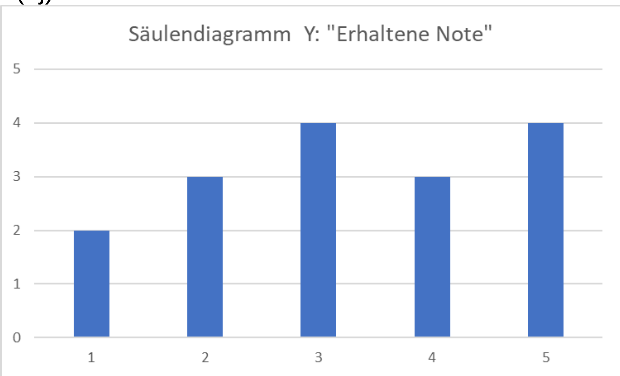


$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \tilde{f}(x)\,dx$$

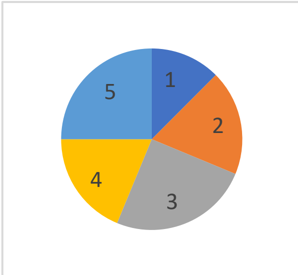
Y: sortierte Daten

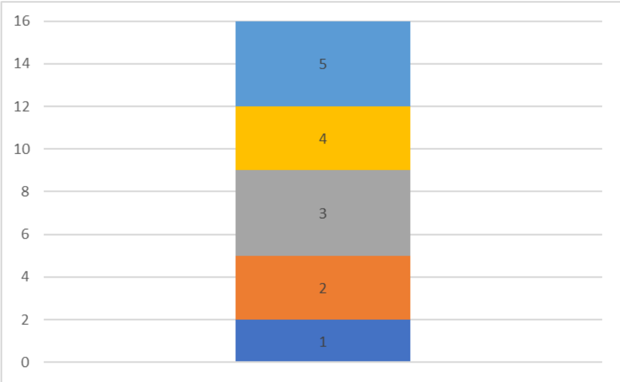
a_j	$h(a_j)$	$f(a_j)$	F(x)	H(x)
1	2	2/16 = 0,1250	0,1250	2
2	3	3/16 = 0,1875	0,3125	5
3	4	4/16 = 0,2500	0,5625	9
4	3	3/16 = 0,1875	0,7500	12
5	4	4/16 = 0,2500	1,0000	16
Σ	**16**	**1,0000**		

h(aj)

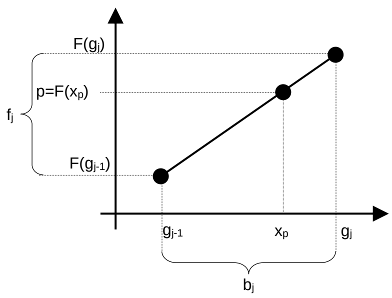


Note





3) Annahme: stetige Gleichverteilung innerhalb der Gruppen



$$\frac{p-F(g_{j-1})}{x_p-g_{j-1}}=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\overset{!}{=}\text{const}=\frac{f_j}{b_j}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{p=F(x_p)=F(g_{j-1})+f_j\cdot\frac{x_p-g_{j-1}}{b_j}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_p=g_{j-1}+\frac{p-F(g_{j-1})}{f_j}\cdot b_j}}$$

$$1-p=1-F(x_p=80{,}7)=1-\left(F(g_{j-1})+f_j\cdot\frac{x_p-g_{j-1}}{b_j}\right)$$

$$=1-\left(0{,}6875+0{,}1875\cdot\frac{80{,}7-75}{17}\right)\approx 1-0{,}75=0{,}25$$

4)

$$x_p=g_{j-1}+\frac{p-F(g_{j-1})}{f_j}\cdot b_j\overset{p=0{,}50}{=}58+\frac{0{,}50-0{,}4375}{0{,}25}\cdot 17=62{,}25$$

Note 3

5) $X_{0,25}$ = 50
$x_{0,75}$ = 80,7
q = $x_{0,75}$ – $x_{0,25}$ = 80,7 – 50 = 30,7
w_u = $x_{0,25}$ – 1,5·q = 50 – 1,5·30,7 = 50 – 46,05 = 3,95 > 0
Ja, die Studenten mit 0 Punkten sind „Ausreißer".

q: Interquartilabstand
w_u: Grenze untere „Antenne" („whisker")

6)

g_{j-1}	g_j	$m_j = \frac{g_{j-1}+g_j}{2}$	$\bar{x}_j$	h_j	$\bar{x}_j \cdot h_j$
0	50	(50 + 0)/2 = 25	0	4	0
50	58	(50 + 58)/2 = 54	54	3	162
58	75	(58 + 75)/2 = 66,5	66,5	4	266
75	92	(92 – 75)/2 = 83,5	83,5	3	250,5
92	100	(100 – 92)/2 = 96	96	2	192
Σ				**16**	**870,5**

a) $\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j \cdot h_j = 870{,}5$

b) $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j \cdot h_j$ = 870,5 / 16 = 54,40625

c) Note 4

7)

a_j	$h(a_j)$	$a_j \cdot f(a_j)$	F(x)	H(x)
1	2	1·2 = 2		
2	3	2·3 = 6		
3	4	3·4 = 12		
4	3	4·3 = 12		
5	4	5·4 = 20		
Σ	**16**	**52**		

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot h\left(a_j\right) = \frac{1}{16} \cdot 52 = 3{,}25$$

8) Die 0 Punkte bei der Note 5 ziehen den Durchschnitt nach unten.
Daher ist die resultierende Note aus den durchschnittlichen Punkten schlechter als bei der Durchschnittsbildung auf Basis der Noten (da ist die Note 5 nur eine Note schlechter als Note 4 bei insgesamt 5 Noten), während bei den Punkten der Abstand zwischen Note 4 und Note 5 54 Punkte von insgesamt 100 Punkten beträgt, also über die Hälfte.
Y ist ordinal skaliert, da keine Metrik mit einheitlicher Einheit existiert.
Somit darf eigentlich das arithmetisches Mittel nicht berechnet werden.

9) Note 3

10) Der Median greift den Wert in der Mitte der sortierten Urliste heraus.
Dabei spielt es keine Rolle, ob die Punkte erst sortiert werden
und dann der Median der Punkte in die Note übersetzt wird,
oder ob erst die Punkte in die Note übersetzt werden
und dann der Median der Note herausgegriffen wird.

11) $\frac{120}{54{,}40625} = 2{,}20562895$ Minuten/Punkt

Teil B

1) Z: „Minuten pro Punkt"

$$\frac{n\cdot \cancel{120}\,[\text{Minuten}]}{\sum_{i=1}^{n}\cancel{120}\left[\cancel{\text{Minuten}}\right]\cdot\frac{1}{z_i}\left[\frac{\text{Punkte}}{\cancel{\text{Minute}}}\right]}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}}\left[\frac{\text{Minuten}}{\text{Punkt}}\right]=\bar{x}_h$$

harmonisches Mittel

2) R: „Steigerungsrate der erreichten Punkte"
Q: „Steigerungsfaktor der erreichten Punkte"
P: „Erreichte Punkte"

$$p_{i+1}=p_i\cdot(1+r_i)=p_i\cdot q_i$$

$$p_n=\cancel{p_0}\cdot\prod_{i=1}^{n}q_i\overset{!}{=}\cancel{p_0}\cdot\bar{q}_g^{\,n}$$

$$\bar{q}_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}q_i}$$

geometrisches Mittel

$$\bar{r}_g=\bar{q}_g-1=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}q_i}-1$$

$$\bar{r}_g=\sqrt[5]{(1+0{,}03)\cdot(1+0{,}06)\cdot(1+0{,}09)\cdot(1+0{,}12)\cdot(1+0{,}15)}-1=\sqrt[5]{1{,}5328}-1=1{,}0892-1=0{,}0892$$

3) a) $$\bar{x}_{p=1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^1\right)^{1/1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

arithmetisches Mittel

b) $$\bar{x}_{p=-1}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^{1/-1}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\bar{x}_h$$

harmonisches Mittel

4) Das Hölder-Mittel verallgemeinert die bekannten Mittelwerte
und ist eine stetige monoton wachsende Funktion von p.
Daraus folgt, dass die bekannten Mittelwerte in folgender Beziehung zueinanderstehen:
$\bar{x}_h=\bar{x}_{-1}\le\bar{x}_g=\bar{x}_0\le\bar{x}=\bar{x}_1$

Es gibt als nicht nur einen, nicht nur einige, sondern sogar unendlich viele Mittelwerte. Es kann jeder beliebige reelle Wert zwischen mit dem Minimum und dem Maximum als Mittelwert interpretiert werden.

5) Das Hölder-Mittel entspricht dem f-Mittel für die Funktion $f=f(p)=x^p$