

## Ü04: Kombinatorik und Ereignisalgebra

### Aufgaben

---

#### Teil A

Eine Urne enthält 6 verschiedenfarbige Kugeln und es sollen zufällig 2 Kugeln daraus gezogen werden. Es kommt dabei nur darauf an, welche Farben die gezogenen Kugeln haben, aber nicht in welchem der Züge die jeweilige Farbe gezogen worden ist.

- 1) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Ziehung der Kugeln, wenn man die gezogenen Kugeln jeweils vor dem darauffolgenden Zug nicht wieder zurücklegen würde?
- 2) Wie lässt sich dasselbe Ergebnis wie in 1) erzielen, wenn man die Kugeln aus der Urne herausnehmen, auf den Tisch legen und allein mit deren Anordnung die Auswahl vornehmen würde?
- 3) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Ziehung der Kugeln, wenn man die gezogenen Kugeln jeweils vor dem darauffolgenden Zug wieder zurücklegen würde?
- 4) Wie lässt sich dasselbe Ergebnis wie in 3) erzielen, wenn man wie zuvor die gezogenen Kugeln jeweils vor dem darauffolgenden Zug nicht wieder zurücklegen würde?

Nun werden zwei derartige Urnen mit identischer Anzahl und farblicher Zusammensetzung der Kugeln betrachtet und es werden nacheinander aus jeder Urne 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

- 1) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es,
  - a. insgesamt aus beiden Urnen jeweils 2 Kugeln zu ziehen?
  - b. 2 gleichfarbige Paare von Kugeln zu erhalten?
  - c. 4 verschiedenfarbige Kugeln zu erhalten?
  - d. genau ein Paar von gleichfarbigen Kugeln zu erhalten?
- 2) Wie viele verschiedene Farbkombinationen sind möglich?

#### Teil B

Jeden Morgen in der Arbeitswoche von Montag bis Freitag kommt der Frühstücksservice ins Büro von Statistix. Er und seine beiden Kollegen kaufen sich dort immer genau einen Wrap. Der Frühstücksservice hat jeden Tag immer 40 Wraps in einem Korb dabei, wobei 2 davon mit Thunfisch und die anderen mit Käse gefüllt sind. Die Wraps sind alle einzeln verpackt, so dass man von außen die Füllung nicht erkennen kann.

- 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Statistix und seine beiden Kollegen genau einen Wrap mit Thunfisch-Füllung an einem Arbeitstag erwerben?
- 2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Statistix den Wrap mit Thunfisch-Füllung erwirbt, wenn er:
  - a. als erster
  - b. als zweiter
  - c. als letzter

seinen Warp auswählt?

Spielt es also eine Rolle, als wievielter er den Wrap auswählt?

### Teil C

Angenommen, Sie befinden sich in einer Spielshow und haben die Wahl zwischen drei Toren.

Hinter einem Tor ist ein Auto, hinter den anderen befindet sich jeweils eine Ziege.

Das Auto und die Ziegen sind vor der Show zufällig auf die Tore verteilt worden, und Sie haben keine Information über die Position des Autos.

Die Regeln lauten: Nachdem Sie ein Tor gewählt haben, bleibt dieses zunächst geschlossen.

Der Showmaster Monty Hall, der weiß, was sich hinter den Toren befindet, muss nun eines der beiden verbleibenden Tore öffnen. Hinter dem von ihm geöffneten Tor muss sich eine Ziege befinden.

Nachdem Monty Hall ein Tor mit einer Ziege geöffnet hat, fragt er Sie, ob Sie bei Ihrer ersten Wahl bleiben oder zum letzten verbliebenen Tor wechseln möchten.

Nehmen Sie an, Sie wählen Tor 1, und der Showmaster öffnet Tor 3 mit einer Ziege.

Er fragt Sie dann: „Möchten Sie zu Tor 2 wechseln?“.

Insbesondere hat der Moderator die Möglichkeit, frei darüber zu entscheiden, welches Tor er öffnet, wenn er die Auswahl zwischen zwei Ziegentoren hat (Sie haben also zuerst das Auto-Tor gewählt). Aufgeteilt in Einzelschritte, ergeben sich damit die folgenden Spielregeln, die dem Kandidaten, der ein Auto gewinnen kann, bekannt sind:

1. Ein Auto und zwei Ziegen werden zufällig auf drei Tore verteilt.
2. Zu Beginn des Spiels sind alle Tore verschlossen, sodass Auto und Ziegen nicht sichtbar sind.
3. Der Kandidat, dem die Position des Autos völlig unbekannt ist, wählt ein Tor aus, das aber vorerst verschlossen bleibt.
4. Fall A: Hat der Kandidat das Tor mit dem Auto gewählt, öffnet der Moderator eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich immer eine Ziege befindet. Der Moderator hat dabei die freie Wahl. Zusatzannahme zum Verhalten des Moderators:
  - a. **Der ausgeglichene Moderator**  
Wenn der Kandidat das Tor mit dem Auto gewählt hat, öffnet der Moderator zufällig mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich immer eine Ziege befindet.
  - b. **Der faule Moderator**  
Der Moderator, der nicht gerne große Wege zurücklegt, öffnet am liebsten Tor 3, weil er dort in der Nähe seinen Standort als Showmaster hat. Wenn also hinter dem vom Kandidaten gewählten Tor 1 das Auto stünde, dann würde er mit Sicherheit Tor 3 öffnen, auf keinen Fall aber Tor 2.
  - c. **Der unausgeglichene Moderator**  
Wenn der Moderator die Möglichkeit hat, aus zwei Toren mit jeweils einer Ziege dahinter ein Tor auszusuchen (der Kandidat hat also das Tor mit dem Auto dahinter ausgewählt), dann öffnet er das Tor mit der höchstmöglichen Nummer mit der Wahrscheinlichkeit  $q$  und das Tor mit der niedrigeren Nummer mit der Wahrscheinlichkeit  $1-q$ .
5. Fall B: Hat der Kandidat ein Tor mit einer Ziege gewählt, dann muss der Moderator dasjenige der beiden anderen Tore öffnen, hinter dem die zweite Ziege steht.
6. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere ungeöffnete Tor zu wählen.
7. Das vom Kandidaten gewählte Tor wird geöffnet, und er erhält das Auto, falls es sich hinter diesem Tor befindet.

Ist es, je nach Zusatzannahme in Fall A, vorteilhaft, Ihre Wahl zu ändern?