

Teil A

Urne mit $n = 6$ verschiedenfarbigen Kugeln
(z.B. R(ot), G(rün), B(lau), W(eiß), S(chwarz), L(ila)),
aus der $r = 2$ Kugeln gezogen werden.

- 1) Auswahl von $r = 2$ Kugeln aus $n = 6$ Kugeln
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (also Kombination) und
ohne Zurücklegen (also ohne Wiederholung):

$$K(n = 2, r = 2) = \binom{n}{r} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

{R,G}	{R,B}	{R,W}	{R,S}	{R,L}	5
	{G,B}	{G,W}	{G,S}	{G,L}	4
		{B,W}	{B,S}	{B,L}	3
			{W,S}	{W,L}	2
				{S,L}	1
Summe					15

- 2) $n = 6$ verschiedenfarbige Kugeln lassen sich auf $P(n) = n! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Die ersten $r = 2$ Kugeln entsprechen den zuvor aus der Urne gezogenen Kugeln, wobei deren $P(r) = r! = 2! = 2$ Anordnungsmöglichkeiten keine Rolle spielen.

Die letzten $s = n - r = 6 - 2 = 4$ Kugeln entsprechen den zuvor den in der Urne verbleibenden Kugeln, deren $P(s) = s! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Anordnungsmöglichkeiten ebenfalls keine Rolle spielen.

Also entspricht dies einer Permutation von n Elementen
mit einer Wiederholung von $r = 2$ Elementen (ausgewählte Kugeln) und
einer Wiederholung von $s = 4$ Elementen (nicht ausgewählte Kugeln):

$$K(n, r) = \binom{n}{r} = P^w(n, r, s = n - r) = \frac{n!}{r! \cdot s!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{\cancel{6}^3 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 3 \cdot 5 = 15$$

- 3) Auswahl von $r = 2$ Kugeln aus $n = 6$ Kugeln
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (also Kombination) und
mit Zurücklegen (also mit Wiederholung):

$$K^w(n = 6, r = 2) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{6+2-1=7}{2} = \frac{7 \cdot \cancel{6}^3}{2} = 7 \cdot 3 = 21$$

{R,R}	{R,G}	{R,B}	{R,W}	{R,S}	{R,L}	6
	{G,G}	{G,B}	{G,W}	{G,S}	{G,L}	5
		{B,B}	{B,W}	{B,S}	{B,L}	4
			{W,W}	{W,S}	{W,L}	3
				{S,S}	{S,L}	2
					{L,L}	1
Summe						21

- 4) 1. Idee: Kugeln verdoppeln:
Damit jede Kugel auch beim Ziehen ohne Zurücklegen
doppelt gezogen werden kann.

$$\binom{6+6=12}{2} = \frac{\cancel{12}^6 \cdot 11}{2} = 6 \cdot 11 = 66 > 21$$

6 verschiedenfarbige Kugeln, die sich doppeln.

21 - 6 = 15 Kugel-2er-Kombinationen,

die sich jeweils 4-fach aus 1. bzw. 2. Kugel zusammensetzen.

Also: $6 + 15 \cdot 4 = 6 + 60 = 66$ Kombinationen

Ü04: Kombinatorik und Ereignisalgebra
Lösung

$$\begin{aligned} &\{R_1, R_2\} \rightarrow \{R, R\} \\ &\left. \begin{array}{l} \{R_1, G_1\} \\ \{R_1, G_2\} \\ \{R_2, G_1\} \\ \{R_2, G_2\} \end{array} \right\} \rightarrow \{R, G\} \\ &\dots \\ &\left. \begin{array}{l} \{S_1, L_1\} \\ \{S_1, L_2\} \\ \{S_2, L_1\} \\ \{S_2, L_2\} \end{array} \right\} \rightarrow \{S, L\} \\ &\{L_1, L_2\} \rightarrow \{L, L\} \end{aligned}$$

2. Idee: $(r - 1) = (2 - 1) = 1$ Joker-Kugel (*) als Vervielfältiger.
 $\{R, R\} \hat{=} \{R; *\}, \dots, \{L, L\} \hat{=} \{L; *\}$

$$\text{Daher: } K^W(n=6; r=2) = \binom{n+(r-1)}{r} = \binom{6+(2-1)}{2} = \binom{7}{2} = 21$$

1)

a) 2 Mal hintereinander 2 Kugeln aus gleicher Urne ziehen
 ohne Reihenfolge (Kombination) und
 ohne Zurücklegen (keine Wiederholung):

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \cdot 15 = 225$$

b) **2 gleichfarbige Paare Kugeln**

Damit sich gleichfarbige Paare bilden,
 müssen die Kugeln aus der jeweils anderen Urne gezogen werden,
 da in jeder Urne nur verschiedenfarbige Kugeln enthalten sind.
 Aus der 2. Urne müssen also Kugeln jeweils derselben Farbe gezogen werden
 wie aus der 1. Urne.
 Die Auswahl in der 2. Urne reduziert sich auf von den ursprünglich 6 auf 2 Kugeln.

1. Urne, 2. Urne

	<i>grünes Paar</i>	<i>blaues Paar</i>	<i>weißes Paar</i>	<i>schwarz Paar</i>	<i>lila Paar</i>	
<i>rotes Paar</i>	{R,G}, {R,G}	{R,B}, {R,B}	{R,W}, {R,W}	{R,S}, {R,S}	{R,L}, {R,L}	5
<i>grünes Paar</i>		{G,B}, {G,B}	{G,W}, {G,W}	{G,S}, {G,S}	{G,L}, {G,L}	4
<i>blaues Paar</i>			{B,W}, {B,W}	{B,S}, {B,S}	{B,L}, {B,L}	3
<i>weißes Paar</i>				{W,S}, {W,S}	{W,L}, {W,L}	2
<i>schwarzes Paar</i>					{S,L}, {S,L}	1
Summe						15

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{2} = 15 \cdot 1 = 15$$

c) **4 verschiedenfarbige Kugeln**

Die beiden Kugeln aus der jeweiligen Urne sind verschiedenfarbig.
Aus der 2. Urne müssen also Kugeln mit anderen Farben gezogen werden
wie aus der 1. Urne.
Die Auswahl aus der 2. Urne reduziert sich von den ursprünglich 6 auf 4 Kugeln.

1. Urne	2. Urne			
{R,G}	{B,W}	{B,S}	{B,L}	
		{W,S}	{W,L}	
...			{S,L}	15 · 6 = 90
{S,L}	{R,G}	{R,B}	{R,W}	
		{G,B}	{G,W}	
			{B,W}	

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 15 \cdot 6 = 90$$

d) **1 gleichfarbiges Paar Kugeln**

Die beiden Kugeln aus der jeweiligen Urne sind verschiedenfarbig.
Aus der 2. Urne muss also eine Kugel mit gleicher Farbe und
eine Kugel mit anderer Farbe gezogen werden
wie aus der 1. Urne.
Die Auswahl auf der 2. Urne reduziert sich von den ursprünglich 6
im 1. Zug auf 2 (gleiche Farbe) und
im 2. Zug auf 4 (andere Farbe) Kugeln.

1. Urne	2. Urne					
{R,G}	{R,B}	{R,W}	{R,S}	{R,L}		
	{G,B}	{G,W}	{G,S}	{G,L}		
...						15 · 2 · 4 = 120
{S,L}	{S,R}	{S,G}	{S,B}	{S,W}		
	{L,R}	{L,G}	{L,B}	{L,W}		

$$\binom{6}{2} \cdot \left(\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} \right) = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} \right) = 15 \cdot 8 = 120$$

0 Paar gleichfarbiger Kugeln (4 verschiedenfarbige Kugeln)	c)	90
1 Paar gleichfarbiger Kugeln	d)	120
2 Paar gleichfarbiger Kugeln	b)	15
Alle Möglichkeiten	a)	225

2)

0 Paar gleichfarbiger Kugeln (4 aus 6 verschiedenen Farben)	$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$
1 Paar gleichfarbiger Kugeln (3 aus 6 verschiedenen Farben)	$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$
2 Paar gleichfarbiger Kugeln (2 aus 6 verschiedenen Farben)	$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Farbkombinationen insgesamt: 15 + 20 + 15 = 50

Teil B

Es werden aus einem Korb (Urne) mit $N = 40$ Wraps (Kugeln)
 $n = 3$ Wraps (Kugeln) ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung) gezogen.
Es spielt dabei keine Rolle, wer welchen Wrap bekommt (Kombination).

Also gibt es insgesamt: $\binom{N=40}{n=3} = \frac{40 \cdot \cancel{39}^{13} \cdot \cancel{38}^{19}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 40 \cdot 13 \cdot 19 = 9.880$ Kombinationen.

Die Wraps unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Füllung und werden auf 2 Körbe verteilt:

Korb (Urne) 1: $M = 2$ Wraps mit Thunfisch-Füllung,
von denen $x = 1$ Wrap ausgewählt werden soll:

$$\binom{M=2}{x=1} = \frac{2}{1} = 2 \text{ Kombinationen}$$

Korb (Urne) 2: $N - M = 40 - 2 = 38$ Wraps mit Käse-Füllung,
von denen $n - x = 3 - 1 = 2$ ausgewählt werden sollen:

$$\binom{N-M=40-2=38}{n-x=3-1=2} = \frac{\cancel{38}^{19} \cdot 37}{\cancel{2} \cdot 1} = 19 \cdot 37 = 703 \text{ Kombinationen}$$

Insgesamt: $2 \cdot 703 = 1.406$ Kombinationen

1) Laplace-Wahrscheinlichkeit: $\frac{\text{"günstige Fälle"}}{\text{"mögliche Fälle"}} = \frac{1.406}{9.880} = 0,14230769$

2) T_i : „Wrap mit Thunfisch-Füllung im i -ten Zug“

a) $P(T_1) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 0,05$

b)
$$\begin{aligned} P(T_2) &= P((T_2 \cap T_1) \cup (T_2 \cap \bar{T}_1)) = P(T_2 \cap T_1) + P(T_2 \cap \bar{T}_1) = \\ &= P(T_2|T_1) \cdot P(T_1) + P(T_2|\bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_1) \\ &= \frac{1}{39} \cdot \frac{2}{40} + \frac{2}{39} \cdot \frac{38}{40} = \frac{2+76}{39 \cdot 40} = \frac{\cancel{78}}{\cancel{1.560}^{20}} = \frac{1}{20} = 0,05 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(T_3) &= P((T_3 \cap (T_2 \cap T_1)) \cup (T_3 \cap (\bar{T}_2 \cap T_1)) \cup (T_3 \cap (T_2 \cap \bar{T}_1)) \cup (T_3 \cap (\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1))) = \\ &= P(T_3 \cap (T_2 \cap T_1)) + P(T_3 \cap (\bar{T}_2 \cap T_1)) + P(T_3 \cap (T_2 \cap \bar{T}_1)) + P(T_3 \cap (\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1)) = \\ &= P(T_3|T_2 \cap T_1) \cdot P(T_2 \cap T_1) + P(T_3|\bar{T}_2 \cap T_1) \cdot P(\bar{T}_2 \cap T_1) + \\ &\quad P(T_3|T_2 \cap \bar{T}_1) \cdot P(T_2 \cap \bar{T}_1) + P(T_3|\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1) = \\ &= P(T_3|T_2 \cap T_1) \cdot P(T_2|T_1) \cdot P(T_1) + P(T_3|\bar{T}_2 \cap T_1) \cdot P(\bar{T}_2|T_1) \cdot P(T_1) + \\ &\quad P(T_3|T_2 \cap \bar{T}_1) \cdot P(T_2|\bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_1) + P(T_3|\bar{T}_2 \cap \bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_2|\bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_1) = \\ &= \frac{0}{38} \cdot \frac{1}{39} \cdot \frac{2}{40} + \frac{1}{38} \cdot \frac{38}{39} \cdot \frac{2}{40} + \frac{1}{38} \cdot \frac{2}{39} \cdot \frac{38}{40} + \frac{2}{38} \cdot \frac{37}{39} \cdot \frac{38}{40} = \\ &= \frac{0+76+76+2.812}{38 \cdot 39 \cdot 40} = \frac{\cancel{2.964}}{\cancel{59.280}^{20}} = \frac{1}{20} = 0,05 \end{aligned}$$

Nein, es spielt keine Rolle,
da die Erfolgswahrscheinlichkeit, einen Wrap mit Thunfisch-Füllung zu erwerben,
a-priori immer gleich 5 % ist, egal ob Statistix als erster, zweiter oder letzter auswählt.

Teil C

G_i : „Der Gewinn ist hinter Tor i “ ($i = 1, 2, 3$)
 M_j : „Der Moderator öffnet Tor j “ ($j = 1, 2, 3$)

$$P(G_1) = P(G_2) = P(G_3) = \frac{1}{3}$$

Der Kandidat hat Tor 1 gewählt und der Moderator hat daraufhin das Tor 3 geöffnet.
 Lohnt es sich für den Kandidaten zu wechseln?
 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tor 2 ist?

$$\begin{aligned} P(G_2|M_3) &= \frac{P(G_2 \cap M_3)}{P(M_3)} = \frac{P(M_3 \cap G_2)}{P(M_3)} = \frac{P(M_3|G_2) \cdot P(G_2)}{P(M_3)} \\ &\quad \text{Satz von Bayes} \\ &= \frac{P(M_3|G_2) \cdot P(G_2)}{\underbrace{P(M_3|G_1) \cdot P(G_1) + P(M_3|G_2) \cdot P(G_2) + P(M_3|G_3) \cdot P(G_3)}_{=P(M_3)}} \\ &\quad \text{Satz der totalen Wahrscheinlichkeit} \end{aligned}$$

Der ausgeglichene Moderator

$$P(M_3|G_1) = \frac{1}{2} \quad P(M_3|G_2) = 1 \quad P(M_3|G_3) = 0$$

$$P(G_2|M_3) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+2+0}{6}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

Der Kandidat sollte also wechseln, um seine Gewinnchancen von anfangs $\frac{1}{2}$ auf $\frac{2}{3}$ zu verdoppeln.

Der faule Moderator

$$P(M_3|G_1) = 1 \quad P(M_3|G_2) = 1 \quad P(M_3|G_3) = 0$$

$$P(G_2|M_3) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+1+0}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Der hinter Tor 2 ist genauso wahrscheinlich wie der Gewinn hinter Tor 1.
 Seine Gewinnchance ist also unabhängig davon, ob er bei Tor 1 bleibt oder zu Tor 2 wechselt.

Der unausgeglichene Moderator

$$P(M_3|G_1) = q \quad P(M_3|G_2) = 1 \quad P(M_3|G_3) = 0$$

$$P(G_2|M_3) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{q \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{q+1+0}{3}} = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{3}{q+1} = \frac{1}{q+1} \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{q=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{1+2}{2}} = \frac{2}{3} \\ \stackrel{q=1}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Mit $q = \frac{1}{2}$ ergibt sich der Spezialfall „Der ausgeglichene Moderator“ und mit $q = 1$ der Spezialfall „Der faule Moderator“.