Teil A

1) A_i: „Herr A sitzt in Abteil i“ $P(A_i)=\frac{1}{3}$

B_i: „Herr B sitzt in Abteil i“ $P(B_i)=\frac{1}{3}$

$P(R_{ij}=A_i\cap B_j)=P(A_i)\cdot P(B_j)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

2) $\neg A_i$: „Herr A sitzt nicht in Abteil i“ $P(\neg A_i)=1-P(A_i)=1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$

$\neg B_i$: „Herr B sitzt nicht in Abteil i“ $P(\neg B_i)=1-P(B_i)=1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(N_{ij}=\neg A_i\cap\neg B_j)=P(\neg A_i)\cdot P(\neg B_i)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

3) a)

$P(X=1)=P(R_{11}\cup R_{22}\cup R_{33})=P(R_{11})+P(R_{22})+P(R_{33})=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$

$P(X=2)=1-P(X=1)=1-\frac{3}{9}=\frac{9-3}{9}=\frac{6}{9}$

x^2	1	4	
x	1	2	Σ
P(X=x)	3/9	6/9	9/9

Stochastik

$E(X)=\sum_x x\cdot P(X=x)$

$=\frac{1\cdot 3+2\cdot 6}{9}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}=1,\overline{66}$

Empirie

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}a_j\cdot h(a_j)=\sum_{j=1}^{k}a_j\cdot f(a_j)$

$Var(X)=\sum_x (x-E(X))^2\cdot P(X=x)$ $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(a_j-\bar{x})^2\cdot h(a_j)=\sum_{j=1}^{k}(a_j-\bar{x})^2\cdot f(a_j)$

$$=\frac{\left(1-\frac{5}{3}\right)^2\cdot 3+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2\cdot 6}{9}=\frac{\left(\frac{3-5}{3}\right)^2\cdot 3+\left(\frac{6-5}{3}\right)^2\cdot 6}{9}=\frac{\frac{4\cdot 3}{9}+\frac{1\cdot 6}{9}}{9}=\frac{\frac{18}{9}}{9}=\frac{2}{9}=0,\overline{22}$$

$Var(X)=\sum_x x^2\cdot P(X=x)-(E(X))^2$ $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}a_j^2\cdot h(a_j)-\bar{x}^2=\sum_{j=1}^{k}a_j^2\cdot f(a_j)-\bar{x}^2$

$=E(X^2)-(E(X))^2$

$$=\frac{1^2\cdot 3+2^2\cdot 6}{9}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{3+24}{9}-\frac{25}{9}=\frac{2}{9}=0,\overline{22}$$

b)

$P(Y_i=0)=P(N_{ii})=\frac{4}{9}$

$P(Y_i=2)=P(R_{ii})=\frac{1}{9}$

$P(Y_i=1)=1-P(Y_i=0)-P(Y_i=2)=1-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{9-4-1}{9}=\frac{4}{9}$

y_i^2	0	1	4	
y_i	0	1	2	Σ
P(X=x)	4/9	4/9	1/9	9/9

$$E(X) = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0,\overline{66}$$

$$Var(Y_i) = \frac{0^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 1}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{0+4+4}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9} = 0,\overline{44}$$

4) $P(X = 1 \cap Y_i = 1) = 0$

$P(X = 2 \cap Y_i = 2) = 0$

X \ Y_i	**0**	**1**	**2**	**Σ**
1		0/9		**3/9**
2			0/9	**6/9**
Σ	**4/9**	**4/9**	**1/9**	**9/9**

X \ Y_i	**0**	**1**	**2**	**Σ**
1		0/9	1/9	**3/9**
2		4/9	0/9	**6/9**
Σ	**4/9**	**4/9**	**1/9**	**9/9**

X \ Y_i	**0**	**1**	**2**	**Σ**
1	2/9	0/9	1/9	**3/9**
2	2/9	4/9	0/9	**6/9**
Σ	**4/9**	**4/9**	**1/9**	**9/9**

X \ Y_i	0	1	2	Σ
1	2/9	0/9	1/9	**3/9**
2	2/9	4/9	0/9	**6/9**
Σ	**4/9**	**4/9**	**1/9**	**9/9**

5)

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X \cdot X) - E(X) \cdot E(X)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

$x \cdot y_i$	0	1	2	4	Σ
$P(X \cdot Y_i = x \cdot y_i)$	4/9	0/9	5/9	0/9	**9/9**

$$E(X \cdot Y) = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 0}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{10}{9} - \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9} - \frac{10}{9} = 0$$

Da aber $P(X = x \cap Y = y) \neq P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad \forall x, y$,
sind X und Y NICHT stochastisch unabhängig!

Es gelten folgenden Implikationen (aber NICHT umgekehrt!):

$\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ X, Y stochastisch abhängig!

X, Y stochastisch unabhängig $\quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Teil B

1)

a. F_i: „Fahrstuhl i ist besetzt“ $\quad P(F_i)=\frac{2}{3}$

$$P(X=0)=P(\neg F_1\cap\neg F_2)=P(\neg F_1)\cdot P(\neg F_2)=(1-P(F_1))\cdot(1-P(F_2))$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$P(X=1)=P((F_1\cap\neg F_2)\cup(\neg F_1\cap F_2))=P(F_1\cap\neg F_2)+P(\neg F_1\cap F_2)$$
$$=P(F_1)\cdot(1-P(F_2))+\cdot(1-P(F_1))\cdot P(F_2)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=P(F_1\cap F_2)=P(F_1)\cdot P(F_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

x	**0**	**1**	**2**	**Σ**
$P(X=x)$	1/9	4/9	4/9	9/9

b. Y_i: „Anzahl der Fahrgäste im Fahrstuhl i“

$$P(Y_i=0)=P(\neg F_i)=1-P(F_i)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$$
$$P(Y_i=1)=P(Y_i=2)=P(Y_i=3)=\frac{1}{3}\cdot(1-P(Y_i=0))=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

y_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**Σ**
$P(Y_i=y_i)$	3/9	2/9	2/9	2/9	**9/9**

c. $$P(Y=(Y_1,Y_2)=(y_1,y_2)=(Y_1=y_1)\cap(Y_2=y_2))=P(Y_1=y_1)\cdot P(Y_2=y_2)$$

$$P(Z=0)=P(Y=(0,0))=P(Y_1=0)\cdot P(Y_2=0)=\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9}=\frac{9}{81}$$

$$P(Z=1)=P(Y=(0,1)\cup Y=(1,0))$$
$$=P(Y=(0,1))+P(Y=(1,0))$$
$$=P(Y_1=0)\cdot P(Y_2=1)+P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=0)$$
$$=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{9}=\frac{6+6}{81}=\frac{12}{81}$$

$$P(Z=2)=P(Y=(0,2)\cup Y=(1,1)\cup Y=(2,0))$$
$$=P(Y=(0,2))+P(Y=(1,1))+P(Y=(2,0))$$
$$=P(Y_1=0)\cdot P(Y_2=2)+P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=1)+P(Y_1=2)\cdot P(Y_2=0)$$
$$=\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{9}=\frac{6+4+6}{81}=\frac{16}{81}$$

$$\begin{aligned}P(Z=3) &= P\big(Y=(0,3)\cup Y=(1,2)\cup Y=(2,1)\cup Y=(3,0)\big)\\ &= P\big(Y=(0,3)\big)+P\big(Y=(1,2)\big)+P\big(Y=(2,1)\big)+P\big(Y=(3,0)\big)\\ &= P(Y_1=0)\cdot P(Y_2=3)+P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=2)+P(Y_1=2)\cdot P(Y_2=1)+P(Y_1=3)\cdot P(Y_2=0)\\ &= \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{9}=\frac{6+4+4+6}{81}=\frac{20}{81}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Z=4) &= P\big(Y=(1,3)\cup Y=(2,2)\cup Y=(3,1)\big)\\ &= P\big(Y=(1,3)\big)+P\big(Y=(2,2)\big)+P\big(Y=(3,1)\big)\\ &= P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=3)+P(Y_1=2)\cdot P(Y_2=2)+P(Y_1=3)\cdot P(Y_2=1)\\ &= \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4+4+4}{81}=\frac{12}{81}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Z=5) &= P\big(Y=(2,3)\cup Y=(3,2)\big)\\ &= P\big(Y=(2,3)\big)+P\big(Y=(3,2)\big)\\ &= P(Y_1=2)\cdot P(Y_2=3)+P(Y_1=3)\cdot P(Y_2=2)\\ &= \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4+4}{81}=\frac{8}{81}\end{aligned}$$

$$P(Z=6)=P\big(Y=(3,3)\big)=P(Y_1=3)\cdot P(Y_2=3)=\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{81}$$

z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Σ**
$P(Z=z)$	9/81	12/81	16/81	20/81	12/81	8/81	4/81	**81/81**

2)

X \ **Z**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Σ**
0	9/81	0/81	0/81	0/81	0/81	0/81	0/81	**9/81**
1	0/81	12/81	12/81	12/81	0/81	0/81	0/81	**36/81**
2	0/81	0/81	**4/81**	8/81	12/81	8/81	4/81	**36/81**
Σ	**9/81**	**12/81**	**16/81**	**20/81**	**12/81**	**8/81**	**4/81**	**81/81**

$$P\big((X=2)\cap(Z=2)\big)=P\big((Y_1=1)\cap(Y_2=1)\big)=P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=1)=\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{81}$$

Teil C

1) Es werden aus dem Ballkarton (Urne) mit N = 5 Tennisbällen (Kugeln) n = 3 Tennisbälle (Kugeln) ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung) gezogen. Es spielt dabei keine Rolle, wann welcher Ball gezogen wird (Kombination).

Also gibt es insgesamt: $\binom{N=5}{n=3} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 5 \cdot 2 = 10$ Kombinationen.

Die Tennisbälle unterscheiden sich hinsichtlich gespielt/ungespielt und werden auf 2 Kartons verteilt:

Karton (Urne) 1: M = 2 ungespielte Tennisbälle, von denen x Tennisbälle ausgewählt werden sollen: $\binom{M=2}{x}$ Kombinationen

Karton (Urne) 2: N – M = 5 – 2 = 3 bereits gespielte Tennisbälle, von denen n – x = 3 – x ausgewählt werden sollen: $\binom{N-M=5-2=3}{n-x=3-x}$ Kombinationen

Insgesamt: $\binom{2}{x} \cdot \binom{3}{3-x}$ Kombinationen

Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(X=x) = \frac{\text{"günstige Fälle"}}{\text{"mögliche Fälle"}} = \frac{\binom{2}{x}\cdot\binom{3}{3-x}}{10} \begin{cases} \overset{x=0}{=} \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{3-0=3}}{10} = \frac{1\cdot 1}{10} = 0{,}10 \\ \overset{x=1}{=} \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{3-1=2}}{10} = \frac{2\cdot\frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}}{10} = 0{,}60 \\ \overset{x=2}{=} \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{3-2=1}}{10} = \frac{1\cdot 3}{10} = 0{,}30 \end{cases}$$

$$P(X=0 \cap Y=1) = P(Y=1 | X=0)\cdot P(X=0) = \frac{2}{5}\cdot 0{,}10 = 0{,}04$$

$$P(X=1 \cap Y=1) = P(Y=1 | X=1)\cdot P(X=1) = \frac{1}{5}\cdot 0{,}60 = 0{,}12$$

$$P(X=2 \cap Y=1) = P(Y=1 | X=2)\cdot P(X=2) = \frac{0}{5}\cdot 0{,}30 = 0{,}00$$

X \ **Y**	**0**	**1**	**Σ**
0	0,06	0,04	**0,10**
1	0,48	0,12	**0,60**
2	0,30	0,00	**0,30**
Σ	**0,84**	**0,16**	**1,00**

2)

x·y	**0**	**1**	**2**	**Σ**
$P(X\cdot Y = x\cdot y)$	0,88	0,12	0,00	**1,00**

$$E(X\cdot Y) = 0\cdot 0{,}88 + 1\cdot 0{,}12 = 0{,}12$$

$$E(X) = 0\cdot 0{,}10 + 1\cdot 0{,}60 + 2\cdot 0{,}30 = 1{,}20$$
$$E(Y) = 0\cdot 0{,}84 + 1\cdot 0{,}16 = 0{,}16$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = 0{,}12 - 1{,}20\cdot 0{,}16 = 0{,}12 - 0{,}192 = -0{,}072$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0 \quad \Rightarrow$ X, Y stochastisch abhängig!

3) $P(X = 0 \cap Y = 0) + P(X = 1 \cap Y = 0) + P(X = 0 \cap Y = 1) = 0{,}06 + 0{,}48 + 0{,}04 = 0{,}58$