

**Teil A**

Jeden Morgen in der Arbeitswoche von Montag bis Freitag kommt der Frühstücksservice ins Büro von Statistix. Er kauft sich dort immer (als erster) genau einen Wrap. Der Frühstücksservice hat Wraps mit unterschiedlichen Füllungen im Angebot, wobei die Füllung von außen nicht erkennbar und somit jeden Tag zufällig ist. Jeden Tag sind die vom Frühstücksservice angebotenen Wraps

- zu 5% mit **T**hunfisch gefüllt.
- zu 15% mit **M**ozzarella gefüllt.
- zu 80% mit **S**chafskäse gefüllt.

- 1) Wie sind die Zufallsvariablen  $X_F$ : „Anzahl der Wraps mit Füllung **F**, die Statistix am Tag  $i$  erwirbt“ verteilt (Verteilungstyp und -parameter) und wie lautet deren Wahrscheinlichkeitsfunktion?
- 2) Wie stehen die Zufallsvariablen  $X_F$ : „Anzahl der Wraps mit Füllung **F**, die Statistix in einer Arbeitswoche erwirbt“ im Zusammenhang mit  $X_{F_i}$  und wie sind diese verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?  
Wie lautet deren Wahrscheinlichkeitsfunktion?  
Wie erklärt sich der kombinatorische Faktor in der Wahrscheinlichkeitsfunktion?
- 3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Statistix in einer Arbeitswoche
  - a. höchstens 1 Wrap mit Thunfisch
  - b. genau 2 Wraps mit Thunfisch
  - c. weniger als 3 mit Mozzarella
  - d. mehr als 1 mit Mozzarella
  - e. mindestens 2 mit Thunfisch
  - f. höchstens 2 mit Schafskäseerwirbt?
- 4) Wie viele Wraps je Füllung erwirbt Statistix durchschnittlich pro Arbeitswoche und wie groß ist absolute und relative Streuung?
- 5) Wie ist die Zufallsvariable  $Y_F$ : „Anzahl der Tage bis zum ersten Wrap mit Füllung **F**“ verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?  
Wie lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y_F$  aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X_F$  herleiten?
- 6) Wie wahrscheinlich ist es, dass Statistix
  - a. am 3. Tag zum ersten Mal
  - b. niemalseinen Wrap mit Thunfisch erwirbt?
- 7) Nach wie viel Tagen durchschnittlich erwirbt Statistix einen Wrap mit Thunfisch?
- 8) Bis zum Mittwoch einschließlich hat Statistix noch keinen Wrap mit Thunfisch erworben. Wie wahrscheinlich ist es, dass er am Freitag doch noch den ersten Wrap mit Thunfisch erwerben wird?
- 9) Wie ist die Zufallsvariable  $Y_{F,r}$ : „Anzahl der Tage bis zum  $r$ -ten Wrap mit Füllung **F**“ verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?  
Wie lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y_{F,r}$  aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X_F$  herleiten?  
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y_{F,r}$  für  $r = 1$  gleich der Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y_F$  ist!

## Ü06: Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle Aufgaben

---

- 10) Wie wahrscheinlich ist es, dass Statistix am Freitag zum 2. Mal einen Wrap mit Thunfisch erwirbt?
- 11) Nach wie viel Tagen durchschnittlich erwirbt Statistix zum 5. Mal einen Wrap mit Thunfisch?
- 12) Wie ist der Zufallsvariablenvektor  $\mathbf{X} = (X_T, X_M, X_S)$  verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?  
Wie lautet dessen Wahrscheinlichkeitsfunktion?
- 13) Wie wahrscheinlich ist es, dass Statistix in einer Arbeitswoche 1 Wrap mit Thunfisch und 2 Wraps mit Mozzarella erwirbt?
- 14) Wie ist die Zufallsvariable  $X_K = X_M + X_S$ : „Anzahl der Wraps mit Käse-Füllung (Mozzarella oder Schafskäse), die Statistix in einer Arbeitswoche erwirbt“ verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?
- 15) Bestimmen und interpretieren Sie  $\text{Cov}(X_M, X_S)$ !  
Nutzen Sie dabei folgenden Zusammenhang:  
$$\text{Var}(X_M + X_S) = \text{Var}(X_M) + \text{Var}(X_S) + 2 \cdot \text{Cov}(X_M, X_S)$$
- 16) Wie ist die Zufallsvariable  $S_T$ : „Anzahl der Wraps mit Thunfisch-Füllung, die Statistix in 6 Arbeitswochen erwirbt“  
a. exakt  
b. approximativ  
verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?  
Prüfen Sie bei b) die Approximationskriterien!
- 17) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Statistix in 6 Arbeitswochen mindestens 3 Mal einen Wrap mit Thunfisch-Füllung erwirbt, wenn man dabei  
a. Die exakte (aus 16) a.)  
b. Die approximative (aus 16) b.)  
Wahrscheinlichkeitsverteilung verwendet?  
Berechnen Sie bei b. zusätzlich den absoluten und relativen Approximationsfehler!

Für kommende Arbeitswoche packt der Frühstücksservice einen Korb mit 20 Wraps, aus dem Statistix exklusiv seine Wraps auswählt. Die prozentuale Verteilung der Wrap-Füllungen ist identisch wie zuvor.

- 18) Wie ist die Zufallsvariablen  $X_F$ : „Anzahl der Wraps mit Füllung  $F$ , die Statistix in einer Arbeitswoche erwirbt“  
verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?  
Wie lautet deren Wahrscheinlichkeitsfunktion?
- 19) Wie ist die Zufallsvariable  $Y_{F,r}$ : „Anzahl der Tage bis zum r-ten Wrap mit Füllung  $F$ “ verteilt  
(Verteilungstyp und -parameter)?  
Wie lautet deren Wahrscheinlichkeitsfunktion?
- 20) Wie ist der Zufallsvariablenvektor  $\mathbf{X} = (X_T, X_M, X_S)$  verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?  
Wie lautet dessen Wahrscheinlichkeitsfunktion?

**Teil B**

Statistix möchte mit dem Bus fahren.

Er geht davon aus, dass die durchschnittliche Wartezeit auf den Bus 4 Minuten beträgt. Weiterhin geht er davon aus, dass die Wartezeit ein (ganzes) Vielfaches von 2 Minuten und dieses jeweils gleich wahrscheinlich ist.

- 1) Geben Sie den Verteilungstyp und -parameter, den Erwartungswert und die Varianz sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(X = x)$  an und zeichnen diese in ein Diagramm!
- 2) Wie wahrscheinlich ist es, dass man noch höchstens 2 weitere Minute warten muss, wenn man bereits 4 Minuten vergeblich gewartet hat?

Statistix wartet an 2 aufeinanderfolgenden Tagen auf den Bus und betrachtet nun die Wartezeit an den 2 Tagen insgesamt. Er geht davon aus, dass die Wartezeit an den beiden Tagen dem gleichen Wahrscheinlichkeitsmodell wie zuvor folgt und diese unabhängig voneinander sind.

- 3) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(X = x)$ , den Erwartungswert und die Varianz an und zeichnen diese in ein Diagramm!

## Ü06: Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle Aufgaben

### Teil C

Statistix hat an der Uni gelernt, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion

- einer binomialverteilten Zufallsvariable  $X_{n,\pi}$  mit den Parametern  $n$  und  $\pi$  sowie
- einer poissonverteilten Zufallsvariable  $Y_\lambda$  mit dem Parameter  $\lambda$

folgendermaßen definiert sind:

$$P_x = P(X_{n,\pi} = x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x} \quad Q_y = P(Y_\lambda = y) = \frac{\lambda^y}{y!} \cdot e^{-\lambda}$$

1) Zeigen Sie, dass gilt:

a.  $P_0 = (1-\pi)^n$

b.  $Q_0 = e^{-\lambda}$

2) Zeigen Sie, dass gilt:

a.  $\frac{P_1}{P_0} = n \cdot \frac{\pi}{1-\pi}$

b.  $\frac{Q_1}{Q_0} = \lambda$

3) Zeigen Sie, dass gilt:

a.  $\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{\pi}{1-\pi}$

b.  $\frac{Q_{y+1}}{Q_y} = \frac{\lambda}{y+1}$

**Hinweis:**  $\binom{n}{x+1} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \binom{n}{x}$

4) Zeigen Sie, dass gilt:

a.  $P_x = \frac{(n+1)-x}{x} \cdot \frac{\pi}{1-\pi} \cdot P_{x-1}$

b.  $Q_y = \frac{\lambda}{y} \cdot Q_{y-1}$

5) Zeigen Sie, dass gilt:

a.  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \pi \rightarrow 0 \\ n \cdot \pi = \lambda}} (1-\pi)^n = e^{-\lambda}$

b.  $\lim_{\substack{x=y \\ n \rightarrow \infty \\ \pi \rightarrow 0 \\ n \cdot \pi = \lambda}} \left( \frac{(n+1)-x}{x} \cdot \frac{\pi}{1-\pi} \right) = \frac{\lambda}{y}$

**Hinweis:** Definition der Exponential-Funktion:  $e^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{t}{n} \right)^n$

Was folgt daraus?

Statistix hat sich im Statistik-Kurs für Fortgeschrittene mit einer panjerverteilten Zufallsvariable  $Z_{a,b}$  mit den Parametern  $a$  und  $b$  beschäftigt. Dort hat er gelernt, dass für sie gilt:

$$U_z = P(Z_{a,b} = z) = \left( a + \frac{b}{z} \right) \cdot P(Z_{a,b} = z-1) = \left( a + \frac{b}{z} \right) \cdot U_{z-1}$$

6) Zeigen Sie, dass die Panjer-Verteilung die Binomial- als auch die Poissonverteilung enthält, d.h.:

$a = \frac{\pi}{\pi-1}$

$b = \frac{\pi \cdot (n+1)}{1-\pi}$

$U_0 = (1-\pi)^n$

a.  $Z_{a,b} = X_{n,\pi}$

$a = 0$

$b = \lambda$

$U_0 = e^{-\lambda}$

b.  $Z_{a,b} = Y_\lambda$