Ü06: Diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle
Lösung

Teil A

1) $X_{T_i} \sim \text{Bernoulli}(\pi = \pi_T = 0{,}05)$ **Bernoulli-Verteilung**

$X_{M_i} \sim \text{Bernoulli}(\pi = \pi_M = 0{,}15)$

$X_{S_i} \sim \text{Bernoulli}(\pi = \pi_S = 0{,}80)$

$$P(X_{F_i} = x_{F_i}) = \begin{cases} 1-\pi_F & x_{F_i} = 0 \\ \pi_F & x_{F_i} = 1 \end{cases}$$

$$= \pi_F^{x_{F_i}} \cdot (1-\pi_F)^{1-x_{F_i}}$$

2) $X_T = \sum_{i=1}^{n=5} X_{T_i} \sim B(n = 5, \pi = \pi_T = 0{,}05)$ **Binomialverteilung**

$X_M = \sum_{i=1}^{n=5} X_{M_i} \sim B(n = 5, \pi = \pi_M = 0{,}15)$

$X_S = \sum_{i=1}^{n=5} X_{S_i} \sim B(n = 5, \pi = \pi_S = 0{,}80)$

$$P(X_F = x_F) = \frac{n!}{x_F! \cdot (n - x_F)!} \cdot \pi_F^{x_F} \cdot (1-\pi_F)^{n-x_F} = \binom{n}{x_F} \cdot \pi_F^{x_F} \cdot (1-\pi_F)^{n-x_F}$$

Anordnung aller erworbenen Wraps: n! (Permutation)
Wiederholung der Wraps mit entsprechender Füllung: $x_F!$
Wiederholung der Wraps mit entsprechend anderer Füllung: $(n - x_F)!$
oder
Auswahl der n Tage, an denen Wraps mit entsprechender Füllung erworben werden, wobei die Reihenfolge der ausgewählten Tage keine Rolle spielt (Kombination) und die Tage sich alle voneinander unterscheiden (ohne Wiederholung).

3) a. $P(X_T \le 1) = F_{X_T}(1) = 0{,}9774$

b. $P(X_T = 2) = P(X_T = 2) - P(X_T \le 1) = F_{X_t}(2) - F_{X_t}(1) = 0{,}9988 - 0{,}9774 = 0{,}0214$

c. $P(X_M < 3) = P(X_M \le 2) = F_{X_M}(2) = 0{,}9734$

d. $P(X_M > 1) = 1 - P(X_M \le 1) = 1 - F_{X_M}(1) = 1 - 0{,}8352 = 0{,}1648$

e. $P(X_T \ge 2) = P(X_T > 1) = 1 - P(X_T \le 1) = 1 - F_{X_T}(1) = 1 - 0{,}9774 = 0{,}0226$

f. Da die Binomialverteilung nur bis π = 0,50 vertafelt vorliegt, muss mit der Komplementärvariablen gearbeitet werden:

$X_{\bar S} \sim B(n = 5, \pi = \pi_{\bar S} = 1 - \pi_S = 1{,}00 - 0{,}80 = 0{,}20)$

x_S	0	1	2
$x_{\bar S}$	5	4	3
n	5	5	5

$$P(X_S \le 2) = P(X_{\bar S} \ge 3) = P(X_{\bar S} > 2) = 1 - P(X_{\bar S} \le 2) = 1 - F_{X_{\bar S}}(2) = 1 - 0{,}9421 = 0{,}0579$$

4) $E(X_T) = E\left(\sum_{i=1}^{n=5} X_{T_i}\right) = \sum_{i=1}^{n=5} E(X_{T_i}) = \sum_{i=1}^{n=5} \left(0 \cdot (1-\pi_T) + 1 \cdot \pi_T\right) = \sum_{i=1}^{n=5} \pi_T = n \cdot \pi_T = 5 \cdot 0{,}05 = 0{,}25$

$E(X_M) = n \cdot \pi_M = 5 \cdot 0{,}15 = 0{,}75$

$E(X_S) = n \cdot \pi_S = 5 \cdot 0{,}80 = 4{,}00$

$$\operatorname{Var}(X_T)=\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n=5}X_{T_i}\right)\overset{X_{T_i}\text{ unabhängig}}{=}\sum_{i=1}^{n=5}\operatorname{Var}(X_{T_i})=\sum_{i=1}^{n=5}\left((0-\pi_T)^2\cdot(1-\pi_T)+(1-\pi_T)^2\cdot\pi_T\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n=5}\left((\pi_T^2-\pi_T^3)+(1-2\cdot\pi_T+\pi_T^2)\cdot\pi_T\right)=\sum_{i=1}^{n=5}\left(\pi_T^2\cancel{-\pi_T^3}+\pi_T-2\cdot\pi_T^2\cancel{+\pi_T^3}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n=5}(\pi_T-\pi_T^2)=\sum_{i=1}^{n=5}\pi_T\cdot(1-\pi_T)=\sum_{i=1}^{n=5}\pi_T=n\cdot\pi_T\cdot(1-\pi_T)=5\cdot 0{,}05\cdot(1-0{,}05)=0{,}2375$$

$$\operatorname{Var}(X_M)=n\cdot\pi_M\cdot(1-\pi_M)=5\cdot 0{,}15\cdot(1-0{,}15)=0{,}6375$$

$$\operatorname{Var}(X_S)=n\cdot\pi_S\cdot(1-\pi_S)=5\cdot 0{,}80\cdot(1-0{,}80)=0{,}8000$$

$$\operatorname{VarK}(X_T)=\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X_T)}}{E(X_T)}=\frac{\sqrt{0{,}2375}}{0{,}25}\approx 1{,}94935887$$

$$\operatorname{VarK}(X_M)=\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X_M)}}{E(X_M)}=\frac{\sqrt{0{,}6375}}{0{,}75}\approx 1{,}06458129$$

$$\operatorname{VarK}(X_S)=\frac{\sqrt{\operatorname{Var}(X_S)}}{E(X_S)}=\frac{\sqrt{0{,}8000}}{4{,}00}\approx 0{,}22360680$$

5) $Y_T\sim G(\pi=\pi_T=0{,}05)$ **Geometrische Verteilung**

$Y_M\sim G(\pi=\pi_M=0{,}15)$

$Y_S\sim G(\pi=\pi_S=0{,}80)$

$$P(Y=y)=P(X_{n=y-1}=0)\cdot\pi=\binom{y-1}{0}\cdot\pi^0\cdot(1-\pi)^{y-1}\cdot\pi=(1-\pi)^{y-1}\cdot\pi$$

6) a. $P(Y_T=3)=(1-\pi_T)^{3-1}\cdot\pi_T=(1-0{,}05)^{3-1}\cdot 0{,}05=0{,}95^2\cdot 0{,}05=0{,}045125$

b. $P(Y_T=y_T)=(1-\pi_T)^{y_T-1}\cdot\pi_T\xrightarrow{y_T\to\infty}0$ (fast) unmöglich

7) Bei n (unabhängigen) Versuchen ist die erwartete Anzahl der Erfolge: $E(X_n)=n\cdot\pi$

Der erwartete Abstand zwischen zwei Erfolgen: $E(Y)=\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot\pi}=\frac{1}{\pi}$

$$E(Y_T)=\frac{1}{\pi_T}=\frac{1}{0{,}05}=20$$

8) $$P(Y_T=3+2|Y_T>3)=\frac{P(Y_T=5)}{P(Y_T>3)}=\frac{(1-\pi)^{\cancel{4}}\cdot\pi}{\cancel{(1-\pi)^3}}=(1-\pi)^1\cdot\pi=(1-\pi)^{2-1}\cdot\pi=P(Y_T=2)$$

Die geometrische Verteilung ist als einzige (diskrete) Verteilung gedächtnislos, d.h. es spielt keine Rolle, wie viele vergebliche Versuche zuvor gemacht worden sind.

9) $Y_{T,r}\sim NB(r,\pi=\pi_T=0{,}05)$ **Negative Binomialverteilung**

$Y_{M,r}\sim NB(r,\pi=\pi_M=0{,}15)$

$Y_{S,r}\sim NB(r,\pi=\pi_S=0{,}80)$

$$P(Y_r=y_r+r)=P(X_{n=y_r+r-1}=r-1)\cdot\pi=\binom{y_r+r-1}{r-1}\cdot\pi^{r-1}\cdot(1-\pi)^{y_r\cancel{+r-1-(r-1)}}\cdot\pi=\binom{y_r+r-1}{y_r}\cdot(1-\pi)^{y_r}\cdot\pi^r$$

$$\overset{r=1}{=}\binom{y_r+1-1}{y_r}\cdot(1-\pi)^{y_r}\cdot\pi^1=(1-\pi)^{y_r}\cdot\pi\overset{\substack{y=y_r+r=y_r+1\\\Rightarrow y_r=y-1}}{=}(1-\pi)^{y-1}\cdot\pi=P(Y=y)$$

10) $P\left(Y_{T,r=2}=3+2=5\right)=\binom{3+2-1=4}{3}\cdot\left(1-0{,}05\right)^3\cdot 0{,}05^2=\frac{4\cdot\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}\cdot 0{,}95^3\cdot 0{,}05^2=0{,}00857375$

11) Auf den nächsten Erfolg wartet man durchschnittlich: $E\left(Y\right)=\frac{1}{\pi}$

Auf den r-ten Erfolg wartet man durchschnittlich r mal auf den nächsten Erfolg:

$E\left(Y_r\right)=r\cdot E\left(Y\right)=r\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{r}{\pi}$

$E\left(Y_{T,r=5}\right)=\frac{r}{\pi_T}=\frac{5}{0{,}05}=100$

12) $\mathbf{X}=\left(X_T,X_M,X_S\right)\sim M\left(n=5;\pi_T=0{,}05;\pi_M=0{,}15;\pi_S=0{,}80\right)$ **Multinomialverteilung**

$P\left(\mathbf{X}=\left(x_T,x_M,x_S\right)\right)=\frac{n!}{x_T!\cdot x_M!\cdot x_S!}\cdot\pi_T^{x_T}\cdot\pi_M^{x_M}\cdot\pi_S^{x_S}$

13) $P\left(\mathbf{X}=\left(1,2,2\right)\right)=\frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot 0{,}05^1\cdot 0{,}15^2\cdot 0{,}80^2=0{,}0009$

14) $X_K\sim B\left(n=5;\pi=\pi_K=\pi_M+\pi_S=0{,}15+0{,}80=0{,}95\right)$

15) $\mathrm{Var}\left(X_M+X_S\right)=\mathrm{Var}\left(X_M\right)+\mathrm{Var}\left(X_S\right)+2\cdot\mathrm{Cov}\left(X_M,X_S\right)$

$2\cdot\mathrm{Cov}(X_M,X_S)=\mathrm{Var}\left(X_M+X_S\right)-\mathrm{Var}\left(X_M\right)-\mathrm{Var}\left(X_S\right)$

$$\mathrm{Cov}(X_M,X_S)=\frac{\mathrm{Var}\left(X_M+X_S\right)-\mathrm{Var}\left(X_M\right)-\mathrm{Var}\left(X_S\right)}{2}$$

$$=\frac{n\cdot\left(\left(\pi_M+\pi_S\right)\cdot\left(1-\pi_M-\pi_S\right)-\pi_M\cdot\left(1-\pi_M\right)-\pi_S\cdot\left(1-\pi_S\right)\right)}{2}$$

$$=n\cdot\frac{\cancel{\pi_M}\ \cancel{+\pi_S}-\left(\cancel{\pi_M^2}+\pi_S\cdot\pi_M\right)-\left(\pi_M\cdot\pi_S+\cancel{\pi_S^2}\right)\cancel{-\pi_M}\ \cancel{+\pi_M^2}\ \cancel{-\pi_S}\ \cancel{+\pi_S^2}}{2}$$

$$=n\cdot\frac{-\cancel{2}\cdot\pi_M\cdot\pi_S}{\cancel{2}}=-n\cdot\pi_M\cdot\pi_S$$

Die Anzahl der erworbenen Wraps mit Mozzarella und mit Schafskäse sind negativ korreliert,
da je mehr Wraps an den 5 Tagen in der Arbeitswoche
von der einen Sorte erworben werden,
desto weniger können von der/den anderen Sorte(n) erworben werden.

16) a. $S_T\sim B\left(n=6\cdot 5=30;\pi=\pi_T=0{,}05\right)$

b. $S_T\sim \text{appr. } P\left(\lambda=n\cdot\pi_T=30\cdot 0{,}05=1{,}5\right)$

$n = 30 \geq 30$

$\pi = 0{,}05 \leq 0{,}05$

17) a. $P\left(S_T\geq 3\right)=P\left(S_T>2\right)=1-P\left(S_T\leq 2\right)=1-F\left(2\right)=1-0{,}8122=0{,}1878$

b. $P\left(S_T\geq 3\right)=P\left(S_T>2\right)=1-P\left(S_T\leq 2\right)=1-F\left(2\right)=1-0{,}8088=0{,}1912$

Abs. Approximationsfehler: 0,1912 - 0,1878 = 0,0034

Rel. Approximationsfehler: 0,0034 / 0,1878 = 0,0181 = 1,81%

$n = 5$ $\quad N = 20$ $\quad M_T = 0{,}05 \cdot 20 = 1$ $\quad M_M = 0{,}15 \cdot 20 = 3$ $\quad M_S = 0{,}80 \cdot 20 = 16$

18) $X_F \sim HG(n,N,M_F)$ $\quad n \le N \quad M_F \le N$ **Hypergeometrische Verteilung**

$$P(X_F = x_F) = \frac{\binom{M_F}{x_F} \cdot \binom{N-M_F}{n-x_F}}{\binom{N}{n}}$$

$\binom{M_F}{x_F}$: Auswahl von x_F Wraps aus allen M_F Wraps mit Füllung F.

$\binom{N-M_F}{n-x_F}$: Auswahl von $(n – x_F)$ Wraps aus allen $(N – M_F)$ Wraps ohne Füllung F.

$\binom{N}{n}$: Auswahl von n Wraps aus allen N Wraps.

19) $Y_F \sim NHG(r,N,M_F)$ $\quad r \le M_F \le N$ **Negative Hypergeom. Verteilung**

$$P(Y_F = y_F + r) = \frac{\binom{y_F + (r-1)}{r-1} \cdot \binom{N-(y_F+r)}{M_F - r}}{\binom{N}{M_F}} \overset{r=1}{=} \frac{\binom{y_F + (1-1) = y_F}{1-1=0} \cdot \binom{N-(y_F+1)}{M_F - 1}}{\binom{N}{M_F}} = \frac{\binom{N-(y_F+1)}{M_F-1}}{\binom{N}{M_F}}$$

$\binom{y_F+(r-1)}{r-1}$: Auswahl der Positionsnummern von (r – 1) Wraps mit Füllung F

für alle $(y_F + r – 1)$ Züge, bevor der r-te Wrap mit Füllung F gezogen wird.

$\binom{N-(y_F+r)}{M_F-r}$: Auswahl der Positionsnummer von $(M_F – r)$ Wraps mit Füllung F

für alle $(N – (y_F + r))$ Züge, nachdem der r-te Wrap mit Füllung F gezogen worden ist.

$\binom{N}{M_F}$: Auswahl der Positionsnummern von M_F Wraps mit Füllung F

aus allen N Zügen.

20) $\mathbf{X} = (X_T, X_M, X_S) \sim MHG(n,N,M_T,M_M,M_S)$ $\quad N = M_T + M_M + M_S$ **Multivariate Hypergeom. Verteilung**

$$P(\mathbf{X} = (x_T, x_M, x_S)) = \frac{\binom{M_T}{x_T} \cdot \binom{M_M}{x_M} \cdot \binom{M_S}{x_S}}{\binom{N}{n}}$$

$\binom{M_T}{x_T}$: Auswahl von x_T Wraps mit Thunfisch aus allen M_T Wraps mit Thunfisch

$\binom{M_M}{x_M}$: Auswahl von x_M Wraps mit Mozzarella aus allen M_M Wraps mit Mozzarella

$\binom{M_S}{x_S}$: Auswahl von x_S Wraps mit Schafskäse aus allen M_S Wraps mit Schafskäse

$\binom{N}{n}$: Auswahl von n Wraps aus allen N Wraps.

Teil B

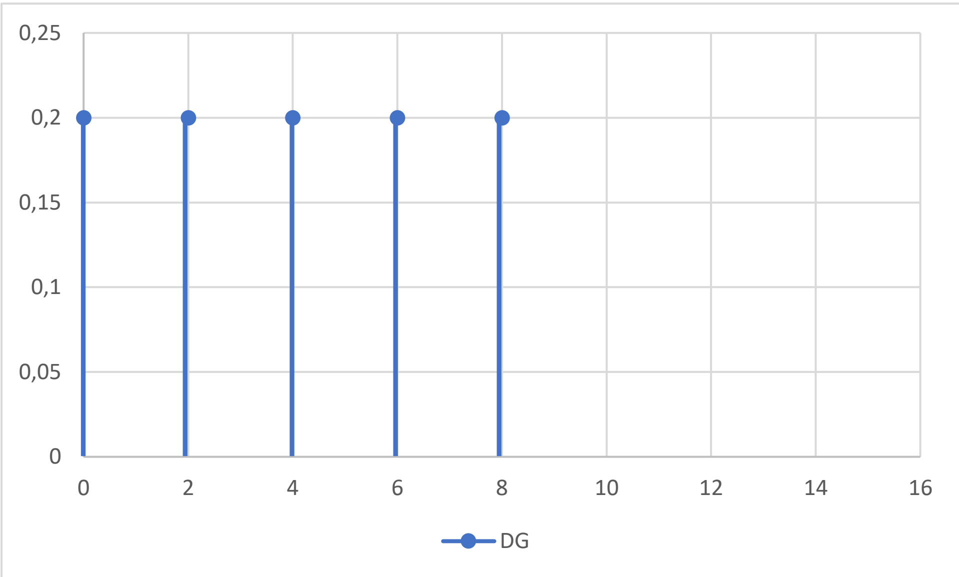
1) X: „Wartezeit auf den Bus“ ~ **diskrete Gleichverteilung** $(n=5, a=0, b=8)$

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{n}\overset{n=5}{=}\frac{1}{5} & \text{für } x\in T=\{a,a+2,\ldots,b-2,b\}\overset{\substack{a=0\\b=8}}{=}\{0,2,4,6,8\}\\ 0 & \end{cases}$$

$$E(X)=\sum_x x\cdot P(X=x)=\frac{0\cdot 1+2\cdot 1+4\cdot 1+6\cdot 1+8\cdot 1}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$E(X^2)=\sum_x x^2\cdot P(X=x)=\frac{0^2\cdot 1+2^2\cdot 1+4^2\cdot 1+6^2\cdot 1+8^2\cdot 1}{5}=\frac{120}{5}=24$$

$$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2=24-4^2=24-16=8$$



2) $$=\frac{P(4<X\le 6)}{P(X>4)}=\frac{P(X=6)}{P(X=6)+P(X=8)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{\cancel{5}}}{\frac{2}{\cancel{5}}}=\frac{1}{2}$$

3) X_1: „Wartezeit am Tag 1“ $\quad E(X_1)=4$

X_2: „Wartezeit am Tag 2“ $\quad E(X_2)=4$

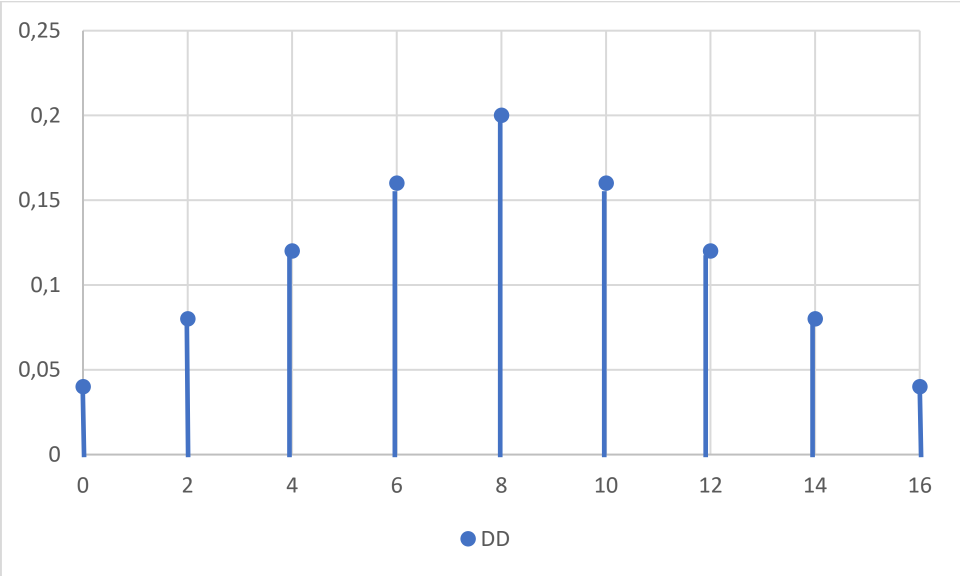
$W=X_1+X_2$ $\quad E(W)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=2\cdot E(X_i)=2\cdot 4=8$

$$\mathrm{Var}(W)=\mathrm{Var}(X_1+X_2)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)=2\cdot \mathrm{Var}(X_i)=2\cdot 8=16$$

$$P(X_1=x_1\cap X_2=x_2)=P(X_1=x_1)\cdot P(X_1=x_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$

w	$P(W=w)$					
0	1/25	(0,0)				
2	2/25	(0,2)	(2,0)			
4	3/25	(0,4)	(4,0)	(2,2)		
6	4/25	(0,6)	(6,0)	(2,4)	(4,2)	
8	5/25	(0,8)	(8,0)	(2,6)	(6,2)	(4,4)
10	4/25	(2,8)	(8,2)	(6,4)	(4,6)	
12	3/25	(4,8)	(8,4)	(6,6)		
14	2/25	(6,8)	(8,6)			
16	1/25	(8,8)				

W ~ **Diskrete symmetrische Dreiecksverteilung**



Teil C

1)

a. $P_0 = \binom{n}{0} \cdot \pi^0 \cdot (1-\pi)^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot (1-\pi)^n = (1-\pi)^n$

b. $Q_0 = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{1} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$

2)

a. $\frac{P_1}{P_0} = \frac{\binom{n}{1} \cdot \pi^1 \cdot (1-\pi)^{n-1}}{(1-\pi)^n} = \frac{n \cdot \pi \cdot (1-\pi)^{n-1}}{(1-\pi)^n} = n \cdot \frac{\pi}{1-\pi}$

b. $\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{\frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} = \lambda$

3)

a. $\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{\binom{n}{x+1} \cdot \pi^{x+1} \cdot (1-\pi)^{n-(x+1)}}{\binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}} = \frac{\binom{n}{x+1} \cdot \pi^x \cdot \pi \cdot (1-\pi)^{n-x-1}}{\binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}} = \frac{\left(\binom{n}{x} \cdot \frac{n-x}{x+1}\right) \cdot \pi}{\binom{n}{x} \cdot (1-\pi)} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{\pi}{1-\pi}$

b. $\frac{Q_{y+1}}{Q_y} = \frac{\frac{\lambda^{y+1}}{(y+1)!} \cdot e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^y}{y!} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\frac{\lambda^y \cdot \lambda^1}{y! \cdot (y+1)} \cdot e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^y}{y!} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{y+1}$

4)

a. $\frac{P_{x+1}}{P_x} \overset{x=x'-1}{=} \frac{P_{(x'-1)+1}}{P_{x'-1}} = \frac{P_{x'}}{P_{x'-1}} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{\pi}{1-\pi} \overset{x=x'-1}{=} \frac{n-(x'-1)}{(x'-1)+1} \cdot \frac{\pi}{1-\pi} = \frac{(n+1)-x'}{x'} \cdot \frac{\pi}{1-\pi}$

$\Rightarrow P_x = \frac{(n+1)-x}{x} \cdot \frac{\pi}{1-\pi} \cdot P_{x-1}$

b. $\frac{Q_{y+1}}{Q_y} \overset{y=y'-1}{=} \frac{Q_{(y'-1)+1}}{Q_{y'-1}} = \frac{Q_{y'}}{Q_{y'-1}} = \frac{\lambda}{y+1} \overset{y=y'-1}{=} \frac{\lambda}{y'-1+1} = \frac{\lambda}{y'}$

$\Rightarrow Q_y = \frac{\lambda}{y} \cdot Q_{y-1}$

5)

a. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \pi\to 0 \\ n\cdot\pi=\lambda}} (1-\pi)^n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \pi\to 0 \\ n\cdot\pi=\lambda}} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \pi\to 0 \\ n\cdot\pi=\lambda}} \left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$

b. $\lim\limits_{\substack{x=y \\ n\to\infty \\ \pi\to 0 \\ n\cdot\pi=\lambda}} \left(\frac{(n+1)-x}{x} \cdot \frac{\pi}{1-\pi}\right) = \lim\limits_{\substack{x=y \\ n\to\infty \\ \pi\to 0 \\ n\cdot\pi=\lambda}} \left(\frac{n\cdot\pi+\pi-y\cdot\pi}{y\cdot(1-\pi)}\right) = \lim\limits_{\substack{x=y \\ n\to\infty \\ \pi\to 0 \\ n\cdot\pi=\lambda}} \left(\frac{\lambda+\pi\cdot(1-y)}{y\cdot(1-\pi)}\right) = \frac{\lambda+0}{y\cdot 1} = \frac{\lambda}{y}$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X (binomialverteilt) strebt für $n\to\infty$ und $\pi\to 0$ mit $\lambda=n\cdot\pi$ gegen die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Y (poissonverteilt).

6)

a.

$$U_z = \left(a + \frac{b}{z}\right) \cdot U_{z-1} \overset{\substack{a=\frac{\pi}{\pi-1} \\ b=\frac{\pi\cdot(n+1)}{1-\pi}}}{=} \left(\frac{\pi}{\pi-1} + \frac{\frac{\pi\cdot(n+1)}{1-\pi}}{z}\right) \cdot U_{z-1} = \left(\frac{\pi}{\pi-1} + \frac{\pi}{1-\pi} \cdot \frac{n+1}{z}\right) \cdot U_{z-1} =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{1-\pi} + \frac{\pi}{1-\pi} \cdot \frac{n+1}{z}\right) \cdot U_{z-1} = \left(-1 + \frac{n+1}{z}\right) \cdot \frac{\pi}{1-\pi} \cdot U_{z-1} = z \cdot \frac{\pi}{\pi-1} \cdot U_{z-1} =$$

$$= \frac{(n+1)-z}{z} \cdot \frac{\pi}{\pi-1} \cdot U_{z-1}$$

$$\frac{U_z}{U_{z-1}} = \frac{(n+1)-z}{z} \cdot \frac{\pi}{\pi-1} \overset{z=x}{=} \frac{(n+1)-x}{x} \cdot \frac{\pi}{\pi-1} = \frac{P_x}{P_{x-1}}$$

$$U_0 = (1-\pi)^n = P_0$$

$$\Rightarrow \quad U_z \overset{z=x}{=} P_x \qquad \Rightarrow \quad Z_{a,b} \overset{\substack{a=\frac{\pi}{\pi-1} \\ b=\frac{\pi\cdot(n+1)}{1-\pi} \\ U_0=(1-\pi)^n}}{=} X_{n,\pi}$$

b.

$$U_z = \left(a + \frac{b}{z}\right) \cdot U_{z-1} \overset{\substack{a=0 \\ b=\lambda}}{=} \left(0 + \frac{\lambda}{z}\right) \cdot U_{z-1} = \frac{\lambda}{x} \cdot U_{z-1}$$

$$\frac{U_z}{U_{z-1}} = \frac{\lambda}{z} \overset{z=y}{=} \frac{\lambda}{y} = \frac{Q_y}{Q_{y-1}}$$

$$U_0 = e^{-\lambda} = Q_0$$

$$\Rightarrow \quad U_z \overset{z=y}{=} Q_y \qquad \Rightarrow \quad Z_{a,b} \overset{\substack{a=0 \\ b=\lambda \\ U_0=e^{-\lambda}}}{=} Y_{\lambda}$$