Ü07: Stetige Wahrscheinlichkeitsmodelle
Lösung

1) **Fall A**

X_A: „Wartezeit auf den Bus“ ~ diskrete Gleichverteilung $(n = 3, a = 0, b = 8)$

$$P(X_A = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \overset{n=5}{=} \frac{1}{5} & \text{für } x \in T = \{a, a+2, ..., b-2, b\} \overset{\substack{a=0\\b=8}}{=} \{0,2,4,6,8\} \\ 0 & \end{cases}$$

$$E(X_A) = \sum_x x \cdot P(X_A = x) = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$E(X_A{}^2) = \sum_x x^2 \cdot P(X_A = x) = \frac{0^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 1 + 6^2 \cdot 1 + 8^2 \cdot 1}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

$$\mathrm{Var}(X_A) = E(X_A{}^2) - (E(X_A))^2 = 24 - 4^2 = 24 - 16 = 8$$

Fall B

X_B: „Wartezeit auf den Bus“ ~ stetige Gleichverteilung $(a = 0, b = 8)$

$$f_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \overset{\substack{a=0\\b=8}}{=} \frac{1}{8-0} = \frac{1}{8} & \text{für } a = 0 \le x \le b = 8 \\ 0 & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X_B) &= \int_a^b x \cdot f_B(x)\, dx \\ &= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2\right]_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \left[x^2\right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot (b+a) \cdot (b-a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot (b+a) \cdot \cancel{(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \overset{\substack{a=0\\b=8}}{=} \frac{0+8}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx - \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_a^b - \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \left[x^3\right]_a^b - \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot (b^3 - a^3) - \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \cancel{(b-a)} \cdot (b^2 + b \cdot a + a^2) - \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \\ &= \frac{4 \cdot (b^2 + b \cdot a + a^2) - 3 \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2)}{12} = \frac{b^2 - 2 \cdot b \cdot a + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \overset{\substack{a=0\\b=8}}{=} \frac{(8-0)^2}{12} = \frac{64}{12} = 5{,}\overline{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(b-a) \cdot (b^2 + b \cdot a + a^2) \\ &= b \cdot b^2 + b \cdot b \cdot a + b \cdot a^2 - a \cdot b^2 - a \cdot b \cdot a - a \cdot a^3 \\ &= b^3 \cancel{+a \cdot b^2} \cancel{+a^2 \cdot b} \cancel{-a \cdot b^2} \cancel{-a^2 \cdot b} - a^3 \\ &= b^3 - a^3 \end{aligned}$$

Fall C
Das Eintreffen des Busses entspricht einem Poisson-Prozess (seltene, unabhängige, punktförmige Ereignisse in einem Kontinuum der Länge 1) mit den Eigenschaften:

- **Stationarität**
  („*das Eintreffen des Busses ist (…) auch nicht von der Tageszeit und des Tages im Jahr abhängig.*“)

  - **Homogenität**
    Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses in einem bestimmten Intervall ist unabhängig von der **Lage** des Intervalls

  und

  - **Proportionalität**
    Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses in einem bestimmten Intervall ist proportional zur **Länge** des Intervalls

- **Nachwirkungsfreiheit**
  Ereignisse treten unabhängig voneinander auf.
  („*Das Eintreffen des Busses ist jeweils unabhängig voneinander*“)

- **Ordinarität**
  Ereignisse sind punktförmig,
  d.h. sie können nicht mehrfach in einem Punkt des Intervalls auftreten.
  („*Es kommt nicht mehr als ein Bus auf einmal.*“)

Y_6: „Anzahl der eintreffenden Busse in 4 Minuten“ ~ Poissonverteilung $\left(\lambda = \lambda_4 = 1\right)$

Y_1: „Anzahl der eintreffenden Busse in 1 Minute“ ~ Poissonverteilung $\left(\lambda = \lambda_1 = \lambda_4 \cdot \frac{1}{4} \overset{\lambda_4 = 1}{=} 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\right)$

Y_x: „Anzahl der eintreffenden Busse in x Minuten“ ~ Poissonverteilung $\left(\lambda = \lambda_x = \lambda_1 \cdot x \overset{\lambda_1 = \frac{1}{4}}{=} \frac{1}{4} \cdot x\right)$

$$P(Y = y) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \pi \to 0 \\ n \cdot \pi = \lambda}} \left(\binom{n}{y} \cdot \pi^y \cdot (1-\pi)^{n-y} \right) = \ldots = \frac{\lambda^y}{y!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$E(Y) = \lambda$$

$$Var(Y) = \lambda$$

X_C: „Wartezeit auf den Bus (in Minuten)“ ~ Exponentialverteilung $\left(\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4}\right)$

$$P(X_c > x) \overset{!}{=} P(Y_x = 0) = \frac{(\lambda_x)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda_x} = e^{-\lambda_x} = e^{-\lambda \cdot x}$$

$$F(x) = P(X_C \le x) = 1 - P(X_C > x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \overset{\lambda = \frac{1}{4}}{=} 1 - e^{-\frac{x}{4}}$$

$$f_C(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\lambda \cdot \left(-e^{-\lambda \cdot x}\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \overset{\lambda = \frac{1}{4}}{=} \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

$$E(X_C) = \int_0^{+\infty} x \cdot f_C(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx$$

Kettenregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$\int (f \cdot g)' = \int f' \cdot g + \int f \cdot g'$$

$$f \cdot g = \int f' \cdot g + \int f \cdot g'$$

Partielle Integration: $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$

$$E(X_C) = \int_0^{+\infty} \underset{f}{x} \cdot \underbrace{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}}_{g'}\,dx = \left[\underset{f}{x} \cdot \underbrace{\left(-e^{-\lambda \cdot x}\right)}_{g} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underset{f'}{1} \cdot \underbrace{\left(-e^{-\lambda \cdot x}\right)}_{g}\,dx =$$

$$= \left[\lim_{z \to +\infty} \left(-x \cdot e^{-\lambda \cdot x}\right) - 0 \right] + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\lambda} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx}_{1} = \frac{1}{\lambda} \overset{\lambda = \frac{1}{4}}{=} \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$E\left(X_C{}^2\right) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f_C(x)\,dx - \left(E(X_C)\right)^2 = \int_0^{+\infty} \underset{f}{x^2} \cdot \underbrace{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}}_{g'}\,dx$$

$$= \left[\underset{f}{x^2} \cdot \underbrace{\left(-e^{-\lambda \cdot z}\right)}_{g} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underset{f'}{2x} \cdot \underbrace{\left(-e^{-\lambda \cdot x}\right)}_{g}\,dx$$

$$= \left[\lim_{x \to +\infty} \left(-x^2 \cdot e^{-\lambda \cdot x}\right) - 0 \right] + 2 \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\lambda}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx$$

$$= 0 + 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot E(Z) = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

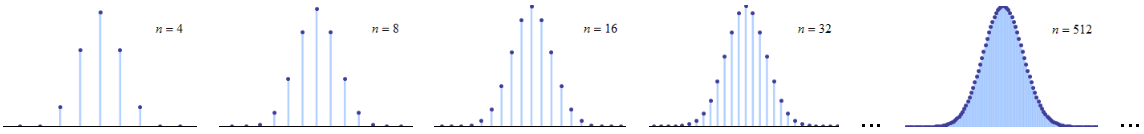
$$Var(X_C) = E\left(X_C{}^2\right) - \left(E(X_C)\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \overset{\lambda = \frac{1}{4}}{=} \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

Fall D
X_D: „Wartezeit auf den Bus“ ~ Normalverteilung $\left(\mu = 4, \sigma^2 = 4^2 = 16\right)$

Normalverteilung gilt als wichtig(st)er Verteilungstyp in der Stochastik/Statistik.

Definition durch Gauß in
"*Theorie der Bewegung der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper*" (*1809*)

1812 für 0 < π < 1
Grenzfall der Binomialverteilung B(n $\to \infty$, 0 < π < 1) (Satz von de Moivre-Laplace)
1730 für π = 0,5



$$f_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \overset{\substack{\mu=4 \\ \sigma^2=16}}{=} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 16}} \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{2 \cdot 16}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{32}}$$

$$E(X_D) = \mu = 4$$

$$Var(X_D) = \sigma^2 = 4^2 = 16$$

Symmetrisch um den Erwartungswert μ (Schiefe = 0)
Wölbung: Kurtosis = 3, Exzess = 0
Wendepunkte bei $x = \mu \pm \sigma$

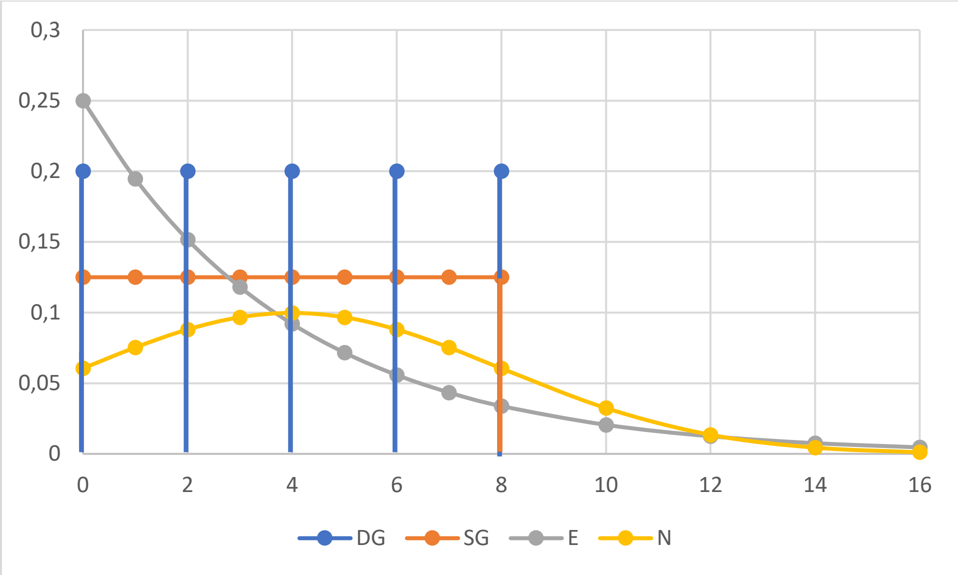
Besitzt kein definites Integral, das in geschlossener Form lösbar ist,
daher müssen Wahrscheinlichkeiten numerisch berechnet werden!

Es gibt für die **Standard-Normalverteilung** (μ = 0, σ^2 = 1)
eine Tabelle für die Verteilungsfunktion F(x), welche als $\Phi(x)$ bezeichnet wird.
Diese kann auch für Normalverteilungen mit beliebigen Parametern durch
Standardisierung (Erwartungswert μ abziehen und durch Standardabweichung σ teilen)
genutzt werden, da die lineare Transformation den Verteilungstyp „Normalverteilung“ erhält
und im speziellen Fall der Standardisierung die Standard-Normalverteilung ergibt.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1)$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X)-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = \frac{0}{\sigma} = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot Var(X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = \frac{\cancel{\sigma^2}}{\cancel{\sigma^2}} = 1$$



2) $P(X_D < 0) = P\left(Z = \frac{X_D - \mu}{\sigma} < \frac{0-4}{4} = -1\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

3) $P(X \le 4+2 | X > 4) = \frac{P(4 < X \le 4+2 = 6)}{P(X > 4)} =$

Fall A: $= \frac{P(4 < X_A \le 6)}{P(X_A > 4)} = \frac{P(X_A = 6)}{P(X_A = 6) + P(X_A = 8)} = \frac{1}{2}$

Fall B: $F_B(x) = \int_{-\infty}^{x} f_B(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{1}{b-a} \cdot x\right]_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} \overset{\substack{a=0\\b=8}}{=} \frac{x}{8}$

$$= \frac{F_B(6) - F_B(4)}{1 - F_B(4)} = \frac{\frac{6}{8} - \frac{4}{8}}{1 - \frac{4}{8}} = \frac{\frac{2}{\cancel{8}}}{\frac{4}{\cancel{8}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Fall C: $= \frac{F_C(4+2) - F_C(4)}{1 - F_C(4)} = \frac{\cancel{1} - e^{-\frac{(4+2)}{4}} - \left(\cancel{1} - e^{-\frac{(4)}{4}}\right)}{e^{-\frac{6}{6}}} = \frac{\cancel{e^{-\frac{(4)}{4}}} - \cancel{e^{-\frac{(4)}{4}}} \cdot e^{-\frac{(2)}{4}}}{\cancel{e^{-\frac{4}{4}}}} = 1 - e^{-\frac{(2)}{4}} = F_C(2)$

$\approx 1 - 0{,}6065 = 0{,}3935$

Man sagt auch, dass die Exponentialverteilung „ohne Gedächtnis“ ist.
Diese Gedächtnislosigkeit resultiert aus der Nachwirkungsfreiheit
bzw. der Unabhängigkeit der Ereignisse des Poisson-Prozesses.
Die Exponentialverteilung ist die einzige stetige Verteilung mit dieser Eigenschaft.

Die geometrische Verteilung als ihr diskretes Pendant weist ebenfalls diese Eigenschaft als einzige diskrete Verteilung auf.

Die Gedächtnislosigkeit vereinfacht zwar die Berechnung,
schränkt aber die Anwendbarkeit der Exponentialverteilung ein.
So ist sie aufgrund dessen nur bei sogenannten ermüdungsfreien Systemen,
also ohne Berücksichtigung von Alter und Verschleiß und mit konstanter Ausfallrate λ,
als Lebensdauerverteilung einsetzbar (im Gegensatz zur Weibull-Verteilung).

Weibull-Verteilung: $f(x) = \lambda \cdot k \cdot (\lambda \cdot k)^{k-1} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)^k}$

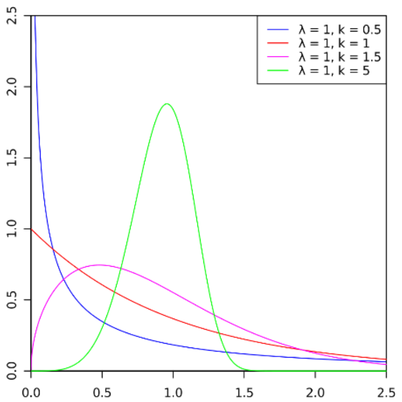
Skalenparameter: $T = \frac{1}{\lambda}$ durchschnittliche Lebensdauer

Formparameter: $k < 1$: fallende Ausfallrate

$k = 1$: konstante Ausfallrate
Es ergibt sich die Exponentialverteilung:

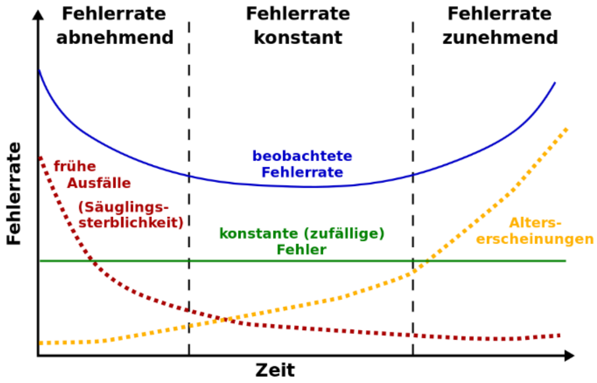
$$f(x) = \lambda \cdot k \cdot (\lambda \cdot k)^{k-1} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)^k}$$
$$\overset{k=1}{=} \lambda \cdot 1 \cdot (\lambda \cdot k)^{1-1} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)^1} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

$k > 1$: steigende Ausfallrate



Durch Kombination von drei Weibull-Verteilung mit unterschiedlichen Formparametern lässt sich die Ausfallrate als „Badewannenkurve“ modellieren:

- $k < 1$: Frühausfälle in der Einlaufphase („Kinderkrankheiten“)
- $k = 1$: zufällige Ausfälle in der Betriebsphase
- $k > 1$: Ermüdungs- und Verschleißausfälle am Ende der Produktlebensdauer



Fall D: $$= \frac{F_D(6) - F_D(4)}{1 - F_D(4)} = \frac{\Phi\left(\frac{6-4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-4}{4} = 0\right)}{1 - \Phi\left(\frac{4-4}{4} = 0\right)} = \frac{0{,}6915 - 0{,}5}{0{,}5} = \frac{0{,}1915}{0{,}5} = 0{,}383$$

4) X_1: „Wartezeit am Tag 1" $E(X_1)=4$

X_2: „Wartezeit am Tag 2" $E(X_2)=4$

$W = X_1 + X_2$

$$E(W)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=2\cdot E(X_i)=2\cdot 4=8$$

$$\operatorname{Var}(W)=\operatorname{Var}(X_1+X_2)=\operatorname{Var}(X_1)+\operatorname{Var}(X_2)=2\cdot \operatorname{Var}(X_i)$$

Fall A:

$$P\left(X_{A_1}=x_1 \cap X_{A_2}=x_2\right)=P\left(X_{A_1}=x_1\right)\cdot P\left(X_{A_2}=x_2\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$

x	$P(W_A = w)$					
0	1/25	(0,0)				
2	2/25	(0,2)	(2,0)			
4	3/25	(0,4)	(4,0)	(2,2)		
6	4/25	(0,6)	(6,0)	(2,4)	(4,2)	
8	5/25	(0,8)	(8,0)	(2,6)	(6,2)	(4,4)
10	4/25	(2,8)	(8,2)	(6,4)	(4,6)	
12	3/25	(4,8)	(8,4)	(6,6)		
14	2/25	(6,8)	(8,6)			
16	1/25	(8,8)				

W_A ~ Diskrete symmetrische Dreiecksverteilung

$$\operatorname{Var}(W_A)=2\cdot\operatorname{Var}\left(X_{A_i}\right)=2\cdot 8=16$$

Fall B: Die Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen X_1 und X_2 entspricht der Faltung $f_{X_1 * X_2}(w)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x)\cdot f_{X_2}(w-x)\,dx$ der beiden Verteilungen.

$$\begin{aligned} 0=a\le x \quad &\vee \quad x\le b=8 \\ 0=a\le w-x \quad &\vee \quad w-x\le b=8 \\ 0\le 2\cdot a\le w \quad &\vee \quad w\le 2\cdot b=16 \end{aligned}$$

Indikatorfunktion: $\mathbf{1}_T=\begin{cases}1 & x\in T\\ 0 & x\notin T\end{cases}$

$$f_{W_B}(w)=f_{X_{B_1} * X_{B_2}}(w)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_{B_1}}(x)\cdot f_{X_{B_2}}(w-x)\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{b-a}\cdot\mathbf{1}_{a\le x\le b}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\mathbf{1}_{a\le w-x\le b}\,dx=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \mathbf{1}_{a\le w-x\le b}\,dx$$

$$=\begin{cases}\text{für } 0=2\cdot a\le w\le b=8: \\ \dfrac{1}{(b-a)^2}\cdot\displaystyle\int_a^w 1\,dx=\dfrac{1}{(b-a)^2}\cdot[x]_a^w=\dfrac{w-a}{(b-a)^2}\overset{\substack{a=0\\b=8}}{=}\dfrac{w}{64} \\ \text{für } 8=b\le w\le 2\cdot b=16: \\ \dfrac{1}{(b-a)^2}\cdot\displaystyle\int_{w-b}^b 1\,dx=\dfrac{1}{(b-a)^2}\cdot[x]_{w-b}^b=\dfrac{b-(w-b)}{(b-a)^2}=\dfrac{2\cdot b-w}{(b-a)^2}\overset{\substack{a=0\\b=8}}{=}\dfrac{16-w}{64}\end{cases}$$

W_B ~ Stetige symmetrische Dreiecksverteilung

$$\operatorname{Var}(W_B)=2\cdot\operatorname{Var}\left(X_{B_i}\right)=2\cdot 5{,}\overline{33}=10{,}\overline{66}$$

Fall C:

$$f_{W_C}(w) = f_{X_{C_1} * X_{C_2}}(w) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_{C_1}}(w) \cdot f_{X_{C_2}}(w-x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \mathbf{1}_{x \geq 0} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (w-x)} \cdot \mathbf{1}_{w-x \geq 0}\,dx$$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot x - \lambda \cdot (w-x)} \cdot \mathbf{1}_{z-x \geq 0}\,dx = \lambda^2 \int_0^{w} e^{-\lambda \cdot w}\,dx =$$

$$= \lambda^2 \cdot w \cdot e^{-\lambda \cdot w} \overset{\lambda = \frac{1}{4}}{=} \frac{1}{16} \cdot z \cdot e^{-\frac{w}{4}}$$

$W_C \sim$ Erlang-Verteilung$\left(n = 2, \lambda = \frac{1}{16}\right)$ (Pendant zur Negativ-Binomialverteilung)

$$E(W_C) = 2 \cdot E(X_{C_i}) = 2 \cdot 4 = 8 = \frac{2}{\frac{1}{4}} = \frac{n}{\lambda}$$

$$Var(W_C) = 2 \cdot Var(X_{C_i}) = 2 \cdot 16 = 32 = \frac{2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{n}{\lambda^2}$$

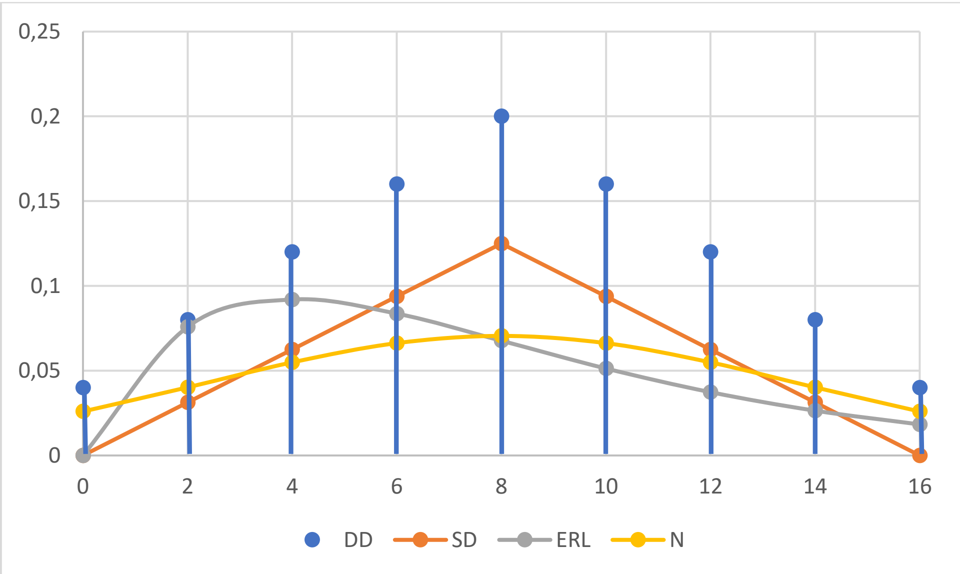
Fall D: Linearkombinationen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen (bzw. deren Faltung) sind wiederum normalverteilt.

$$W_D = X_{D_1} + X_{D_2} \sim N\begin{pmatrix} \mu = \mu_1 + \mu_2 = 4 + 4 = 8; \\ \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 16 + 16 = 32 = \left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$f_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \overset{\substack{\mu=8 \\ \sigma^2=32}}{=} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 32}} \cdot e^{-\frac{(x-8)^2}{2 \cdot 32}} = \frac{1}{8 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-8)^2}{64}}$$

$$E(W_D) = \mu = 8$$

$$Var(W_D) = \sigma^2 = \left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 32$$



Faltungshalbgruppe: Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die hinsichtlich der Faltung abgeschlossen ist, das heißt,
dass die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße aus der Faltungshalbgruppe wieder in der Faltungshalbgruppe enthalten ist.
Beispiel: Binomialverteilung für feste Erfolgswahrscheinlichkeit π,
Normalverteilung

Faltungsidentitäten:

Diskrete Verteilungen	Stetige Verteilung
$DG(a,b) * DG(a,b) = DSD(2a,2b)$ $B(\pi) * B(\pi) = B(n=2,\pi)$ $B(n,\pi) * B(m,\pi) = B(n+m,\pi)$ $G(\pi) * G(\pi) = NB(r=2,\pi)$ $NB(r,\pi) * NB(s,\pi) = NB(r+s,\pi)$ $P(\lambda_1) * P(\lambda_2) = P(\lambda_1+\lambda_2)$	$SG(a,b) * SG(a,b) = SSD(2a,2b)$ $E(\lambda) * E(\lambda) = Erl(\lambda,2)$ $Erl(\lambda,n) * E(\lambda,m) = Erl(\lambda,n+m)$ $N(\mu_1,\sigma_1^2) * N(\mu_2,\sigma_2^2) = N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

5)

$$P(W_D < 0) = P\left(Z = \frac{W_D - \mu}{\sigma} < \frac{0-8}{4\cdot\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \approx 1{,}41\right)$$

$$= \Phi(-1{,}41) = 1 - \Phi(1{,}41) = 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793$$