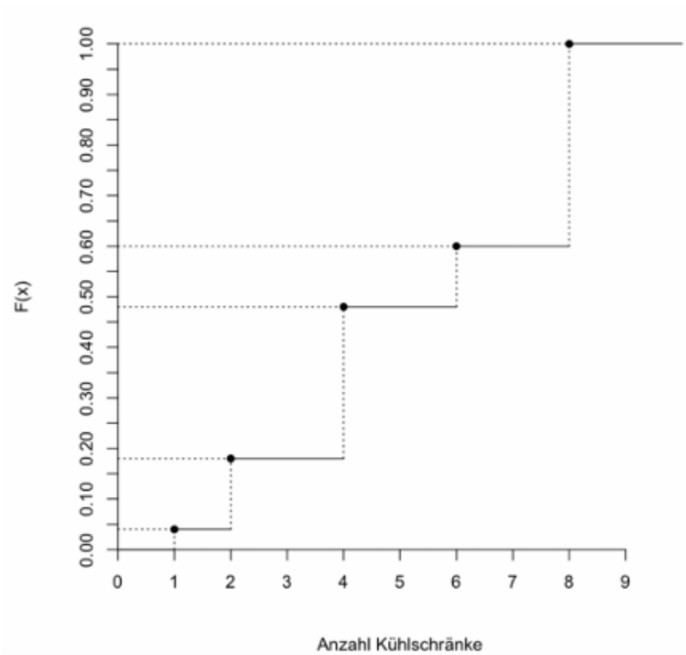
Aufgabe 1 (Empirie)

Aufgabe 1 – Teil A **(20P)**

1) **(4P)**

a_j	$f(a_j)$	$F(x)$	$h(a_j)$
1	0,04	0,04	2
2	0,14	0,18	7
4	0,30	0,48	15
6	0,12	0,60	6
8	0,40	1,00	20
Σ	1,00		50

2) **(2P)**



3) **(3P)**

$\overset{\frown}{x} = 8$

$\tilde{x} = 6$

$\bar{x} = 1 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}14 + 4 \cdot 0{,}30 + 6 \cdot 0{,}12 + 8 \cdot 0{,}40 = 5{,}44$

4) $\bar{x} < \tilde{x} < \overset{\frown}{x}$ rechtssteil/linksschief **(1P)**

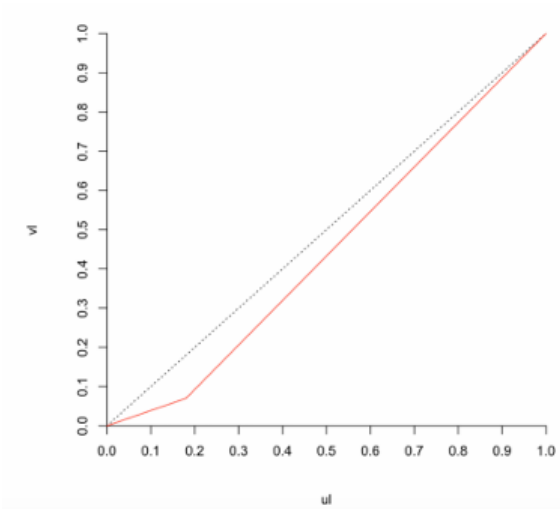
5) **(2P)**

$$s^2 = \begin{aligned} &(1-5{,}44)^2 \cdot 0{,}04 + (2-5{,}44)^2 \cdot 0{,}14 + (4-5{,}44)^2 \cdot 0{,}30 \\ &+ (6-5{,}44)^2 \cdot 0{,}12 + (8-5{,}44)^2 \cdot 0{,}40 \end{aligned} \approx 5{,}73$$

6) $v = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5,7264}}{5,44} = 0,44$ (1P)

7) und 8) (5P)

g_j	g_{j-1}	$u_L = F_j$	m_j	h_j	$m_j \cdot h_j$	$m_j \cdot h_j / V$	v_L
0	4	0,18	2	9	18	0,07	0,07
4	8	1,00	6	41	246	0,93	1,00
Σ					**V = 264**	**1,00**	



9) $G = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{0,18 \cdot 0,07}{2} + 0,82 \cdot 0,07 + \frac{0,82 \cdot 0,93}{2}\right)\right) = 0,11$ (2P)

Aufgabe 1 – Teil B (5P)

1) (5P)

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
	0,01	6	0,001	36	0,06
	0,02	7	0,004	49	0,14
	0,01	3	0,001	9	0,03
	0,03	9	0,009	81	0,27
	-0,01	0	0,001	0	0,00
Σ	**0,06**	**25**	**0,016**	**175**	**0,50**
	0,012	**5**			

$$r = \frac{\sum_{ij} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_i x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) \cdot \left(\sum_i y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2\right)}}$$

$$= \frac{0{,}50 - 5 \cdot 0{,}012 \cdot 5}{\sqrt{\left(0{,}0016 - 5 \cdot 0{,}012^2\right) \cdot \left(175 - 5 \cdot 5^2\right)}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{0{,}00088 \cdot 50}} = 0{,}9535$$

Es liegt ein starker positiver linearer Zusammenhang vor.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Teil A (Kombinatorik) (11P)

1) $P^W(12,3,2,4) = \dfrac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \dfrac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 2 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2}} = 1.663.200$ (2P)

2) $K^W(29,12) = \begin{pmatrix} 29+12-1=40 \\ 12 \end{pmatrix} = \dfrac{40!}{12! \cdot (40-12)!} = 5.586.853.480$ (2P)

3) $V^W(29,12) = 29^{12} = 353.814.783.205.469.041$ (2P)

4) $12! = 479.001.600$ (1P)

5) $K(3,2) \cdot K(12-3=9,2) = \dfrac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot \dfrac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \dfrac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2 \cdot 1}} \cdot \dfrac{9 \cdot \cancel{8}^{4} \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = 108$ (2P)

6) Alle n Elemente aus denen r ohne Wiederholung ausgewählt werden sollen, werden zunächst auf n! Art und Weise angeordnet (Zähler). (2P)
Die r ausgewählten Elemente entsprechenden den ersten r Elementen der Anordnung, die n – r nicht ausgewählten Elemente den letzten n – r Elementen der Anordnung.

Bei den r ausgewählten Elemente spielt die Reihenfolge keine Rolle (da Kombination), d.h. deren Anordnungsmöglichkeiten r! müssen aus der Anordnung herausgerechnet werden (erster Faktor im Nenner p! = r!). Es wiederholt sich bei diesen Elementen der Status „ausgewählt“.

Bei den n – r nicht ausgewählten Elementen spielt die Reihenfolge ebenfalls keine Rolle, d.h. deren Anordnungsmöglichkeiten (n – r)! müssen ebenfalls herausgerechnet werden (zweiter Faktor im Nenner q! = (n – r)!). Es wiederholt sich bei diesen Elementen der Status „nicht ausgewählt“.

Aufgabe 2 – Teil B (Ereignisalgebra) **(14P)**

1) (2P)

$$P(G)=0,25$$
$$P(O)=0,375$$
$$P(G\cap O)=0,09375$$
$$P(Z\cap O)=0,1875$$
$$P(\bar{Z}|\bar{O})=0,80$$
$$P(G\cap Z\cap O)=0,09375$$

2) a) (2P)

$$P(G\cup O)=P(G)+P(O)-P(G\cap O)=0,25+0,375-0,09375=0,53125$$

b) (2P)

$$P(\bar{O}|G)=1-P(O|G)=1-\frac{P(O\cap G)}{P(G)}=1-\frac{0,09375}{0,25}=0,62500$$

c) (3P)

$$P(Z)=P\big((Z\cap O)\cup(Z\cap\bar{O})\big)=P(Z\cap O)+P(Z\cap\bar{O})=P(Z\cap O)+P(Z|\bar{O})\cdot P(\bar{O})=$$
$$=P(Z\cap O)+\big(1-P(\bar{Z}|\bar{O})\big)\cdot(1-P(O))=0,1875+(1-0,8)\cdot(1-0,375)=0,31250$$

d) (3P)

$$P(G|\bar{O}\cup\bar{Z})=\frac{P\big(G\cap(\bar{O}\cup\bar{Z})\big)}{P(\bar{O}\cup\bar{Z})}=\frac{P(\bar{O}\cup\bar{Z}|G)\cdot P(G)}{1-P(Z\cap O)}=\frac{\big(1-P(Z\cap O|G)\big)\cdot P(G)}{1-P(Z\cap O)}=$$
$$=\frac{\left(1-\frac{P(Z\cap O\cap G)}{P(G)}\right)\cdot P(G)}{1-P(Z\cap O)}=\frac{\left(1-\frac{0,09375}{0,25}\right)\cdot 0,25}{1-0,1875}=0,19231$$

3) (2P)

$$P(A\cap B)\overset{\text{A,B unabh.}}{=}P(A)\cdot P(B)\overset{\substack{P(A)\neq 0\\ \text{und}\\ P(B)\neq 0}}{\neq}0\overset{\substack{\text{A,B}\\ \text{disjunkt}}}{=}P(A\cap B)$$

Aufgabe 3 (Verteilungsmodelle)

Aufgabe 3 – Teil A (13P)

1) $X \sim B(25; 0{,}5)$ (1P)

2) a) $\mathbb{P}(X = 12) = F(12) - F(11) = 0{,}5 - 0{,}3450 = 0{,}1550$ (2P)
   b) $\mathbb{P}(8 < X \leq 16) = F(16) - F(8) = 0{,}9461 - 0{,}0539 = 0{,}8922$ (2P)
   c) $(X, Y, Z) \sim M(n; \pi_X, \pi_Y, \pi_Z)$ mit $n = 25, \quad \pi_X = 0{,}5, \quad \pi_Y = 0{,}2 \quad \pi_Z = 0{,}3$ (3P)
   also $\mathbb{P}((X, Y, Z) = (15{,}4{,}6)) = \dfrac{25!}{15!4!6!} \cdot 0{,}5^{15} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}3^6 = 0{,}0244$

3) a) $S \sim B(400; 0{,}005)$ (1P)
   b) $S \overset{appr.}{\sim} P(2)$ weil n = 400 > 30 p = 0,005 ≤ 0,05 (2P)

4) $\mathbb{P}(2 \leq S < 5) = \mathbb{P}(1 < S \leq 4) = F(4) - F(1) = 0{,}9473 - 0{,}4060 = 0{,}5413$ (2P)

Aufgabe 3 – Teil B (6P)

1) a) $Z \sim U([0; 1])$ (1P)
   b) $Z \sim E(1)$ (1P)

2) a) $\mathbb{P}\Big(Z \leq \frac{20}{60} + \frac{20}{60} | Z > \frac{20}{60}\Big) = \dfrac{\mathbb{P}\Big(\frac{1}{3} < Z \leq \frac{2}{3}\Big)}{\mathbb{P}\big(Z > \frac{1}{3}\big)} = \dfrac{\frac{2-1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ (2P)
   b) $\mathbb{P}\Big(Z \leq \frac{20}{60} + \frac{20}{60} | Z > \frac{20}{60}\Big) = \mathbb{P}\big(Z \leq \frac{1}{3}\big) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0{,}2835$ (2P)

Aufgabe 3 – Teil C (6P)

1) a) $\mathbb{P}(F > 2{,}2) = \mathbb{P}(\frac{F-\mu}{\sigma} > \frac{2{,}2-2}{0{,}1}) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$ (2P)
   b) $\mathbb{P}(F < 1{,}8) = \mathbb{P}(F < 2 - 0{,}2) \overset{Symm.}{=} \mathbb{P}(F > 2 + 0{,}2) = \mathbb{P}(F > 2{,}2) = 0{,}0228$ (1P)

2) a) $D \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 5 - 2 = 3$ und $\sigma^2 = 0{,}09 - 0{,}01 = 0{,}08$ (3P)