

Aufgabe 1 (Empirie)

Aufgabe 1 – Teil A

(20P)

1) kardinal diskret

(1P)

2)

(6P)

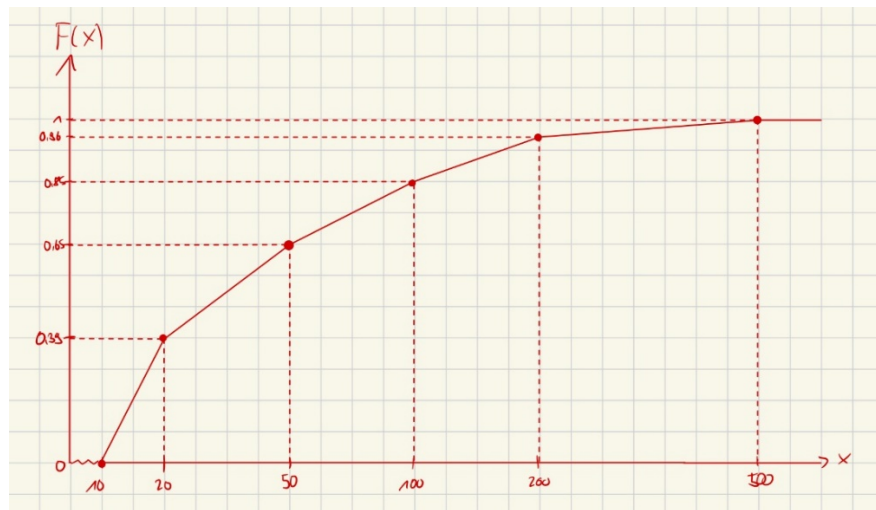
j	Von g_{j-1} bis g_j	h _j	f _j	F(x)	m _j	b _j	m _j *h _j	$\frac{b_j}{f_j}$
1	[10 - 20)	39	0,39	0,39	15	10	585	25,64
2	[20 - 50)	26	0,26	0,65	35	30	910	115,38
3	[50 -100)	20	0,20	0,85	75	50	1500	250,00
4	[100-200)	11	0,11	0,96	150	100	1650	909,09
5	[200-500]	4	0,04	1,00	350	300	1400	7500,00
Σ		n = 100	1,00				6045	

3) stetige Gleichverteilung innerhalb einer Gruppe (für alle Gruppen)

(1P)

4)

(2P)



5) a) $x_{0,25} = 10 + [0,25 - 0] * 25,64 = 16,41$

(1P)

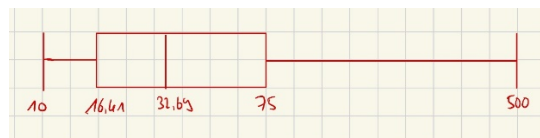
b) $x_{0,5} = 20 + [0,5 - 0,39] * 115,38 = 32,69$

(1P)

c) $x_{0,75} = 50 + [0,75 - 0,65] * 250 = 75$

(1P)

6)



(2P)

7) $\bar{x} = 6045/100 = 60,45$ (1P)

8) $\bar{x}_j = m_j$ für alle $j = 1,2,3,4,5$ (1P)

9) $x_{0,5} < \bar{x}$ linkssteil/rechtsschief (1P)

10) Bei einer **symmetrischen** Verteilung sind die unterdurchschnittlichen Werte (mit negativem Vorzeichen) jeweils genauso weit vom Durchschnitt entfernt wie die überdurchschnittlichen (mit positivem Vorzeichen), so dass sich dies im empirischen Momentenkoeffizient der Schiefe in Summe zu **Null** saldiert. (2P)

Sind die unterdurchschnittlichen Werte weiter entfernt vom Durchschnitt als die überdurchschnittlichen (**rechtssteil/linksschief**), so saldiert sich dies im empirischen Momentenkoeffizient der Schiefe zu einem **negativen Wert**.

Sind die überdurchschnittlichen Werte weiter entfernt vom Durchschnitt als die unterdurchschnittlichen (**linkssteil/rechtsschief**), so saldiert sich dies im empirischen Momentenkoeffizient der Schiefe zu einem **positiven Wert**.

Durch die **Standardisierung** ist der empirischen Momentenkoeffizient der Schiefe **dimensionslos** und ist für beliebige Merkmalen **betragsmäßig vergleichbar** (je größer der Betrag, desto schief ist die Verteilung).

Aufgabe 1 – Teil B (5P)

1) (3P)

	x	y	xy	x ²	y ²
	30	10	300	900	100
	50	12	600	2500	144
	20	12	240	400	144
	10	6	60	100	36
	60	15	900	3600	225
Σ	170	55	2100	7500	649
	34	11			

$$r = \frac{2100 - 5 \cdot 34 \cdot 11}{\sqrt{7500 - 5 \cdot 34^2} \cdot \sqrt{649 - 5 \cdot 11^2}} = 0,84$$

2) starker positiver linearer Zusammenhang (2P)
Je mehr Einwohner, desto mehr Kirchen.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Teil A (Kombinatorik)

(15P)

- 1) $\{(Z, Z), (Z, A), (Z, W), (A, A), (A, Z), (A, W), (W, W), (W, A), (W, Z)\}$ (2P)
oder
 $\{\{Z, Z\}, \{Z, A\}, \{Z, W\}, \{A, A\}, \{A, W\}, \{W, W\}\}$

2) $K^W(n=3, r=9) = \binom{3+9-1=11}{9} = \binom{11}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ (2P)

- 3) Vom Prinzip gar nicht, weil Abhängigkeit nur bei den Wahrscheinlichkeiten eine Rolle (2P)
spielt und die möglichen Ergebnisse gleich bleiben.
Ausnahme: Wenn alle Universitäten die gleiche Antwort geben (perfekte Abhängigkeit)
können alle anderen Ergebnisse nicht mehr vorkommen.

4) $P^W(n=9, p=3, q=2) = 9!/(3!2!) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 / 2 = 30.240$ (2P)

- 5) Alle n Elemente aus denen r ohne Wiederholung ausgewählt werden sollen, (2P)
werden zunächst auf $n!$ Art und Weise angeordnet (Zähler).
Die r ausgewählten Elemente entsprechen den ersten r Elementen der Anordnung,
die $n - r$ nicht ausgewählten Elemente den letzten $n - r$ Elementen der Anordnung.

Bei den r ausgewählten Elemente spielt die Reihenfolge keine Rolle (da Kombination),
d.h. deren Anordnungsmöglichkeiten $r!$ müssen aus der Anordnung herausgerechnet
werden (erster Faktor im Nenner $p! = r!$). Es wiederholt sich bei diesen Elementen der
Status „ausgewählt“.

Bei den $n - r$ nicht ausgewählten Elementen spielt die Reihenfolge ebenfalls keine
Rolle, d.h. deren Anordnungsmöglichkeiten $(n - r)!$ müssen ebenfalls herausgerechnet
werden (zweiter Faktor im Nenner $q! = (n - r)!$). Es wiederholt sich bei diesen Elementen
der Status „nicht ausgewählt“.

- 6) Anzahl Funktionen: $V^W(n=4, r=3) = 4^3 = 64$ (2P)
Anzahl injektive Funktionen: $V(n=4, r=3) = 4!/(4-3)! = 4 \cdot 3 \cdot 2 / 1 = 24$ (2P)
Anzahl nicht-injektiver Funktionen: $64 - 24 = 40$ (1P)

Aufgabe 2 – Teil B (Ereignisalgebra)**(10P)**

$$1) P(S_2 \cup S_4 \cup S_6) = P(S_2) + P(S_4) + P(S_6) = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} \quad (2P)$$

$$2) P(S_5 \cap S_5) = P(S_5) \cdot P(S_5) = \frac{5}{21} \cdot \frac{5}{21} = \frac{25}{441} \quad (2P)$$

$$P((S_4 \cap S_6)) = P(S_4) \cdot P(S_6) \\ = \frac{4}{21} \cdot \frac{6}{21} = \frac{24}{441} < \frac{25}{441} = P(S_5 \cap S_5)$$

$$3) P((S_2 \cap S_4) \cup (S_4 \cap S_2) | A = 6) = \frac{P(6 | (S_2 \cap S_4) \cup (S_4 \cap S_2)) \cdot P((S_2 \cap S_4) \cup (S_4 \cap S_2))}{P(A = 6)} = \quad (4P)$$

$$= \frac{1 \cdot P((S_2 \cap S_4) \cup (S_4 \cap S_2))}{P((S_1 \cap S_5) \cup (S_5 \cap S_1) \cup (S_2 \cap S_4) \cup (S_4 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_3))} = \\ = \frac{P(S_2) \cdot P(S_4) + P(S_4) \cdot P(S_2)}{P(S_1) \cdot P(S_5) + P(S_5) \cdot P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_4) + P(S_4) \cdot P(S_2) + P(S_3) \cdot P(S_3)} = \\ = \frac{\frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{21 \cdot 21}}{\frac{1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{21 \cdot 21}} = \frac{16}{35}$$

$$4) P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \quad (1P)$$

$$5) P(A) > 0, \text{ also } A \neq \emptyset \quad (1P)$$

Aufgabe 3 (Verteilungsmodelle)

Aufgabe 3 – Teil A (7P)

- 1) $X \sim B(7; 0,05)$ (1P)
- 2) a. $\mathbb{P}(X = 0) = 0,95^7 = 0,6983$ (1P)
b. $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,9998 = 0,0002$ (2P)
c. $\mathbb{P}(3 \leq X < 7) = \mathbb{P}(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = 1 - 0,9962 = 0,0038.$ (2P)
- 3) $\mathbb{E}(X) = 7 \cdot 0,05 = 0,35$ (1P)

Aufgabe 3 – Teil B (8P)

- 1) $Y \sim E(1)$ (2P)
- 2) a. $\mathbb{P}(Y \leq 0,25) = F(0,25) = 1 - e^{-0,25} \approx 0,2212$ (1P)
b. $\mathbb{P}(Y \leq 0,8 | Y > 0,4) = \mathbb{P}(Y \leq 0,4) = F(0,4) = 1 - e^{-0,4} \approx 0,3297$ (2P)
c. $\mathbb{P}(0,4 < Y \leq 0,8) = F(0,8) - F(0,4) = (1 - e^{-0,8}) - (1 - e^{-0,4}) \approx 0,2210$ (2P)
- 3) Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung (1P)

Aufgabe 3 – Teil C (4P)

- 1) $Z \sim U([0,750])$ (1P)
- 2) a. $\mathbb{P}(Z \leq 20) = F(20) = \frac{20}{750} \approx 0,0267$ (1P)
b. $\mathbb{P}(Z \leq 200 | Z > 100) = \frac{\mathbb{P}(100 < Z \leq 200)}{\mathbb{P}(Z > 100)} = \frac{F(200) - F(100)}{1 - F(100)} \approx 0,1538$ (2P)

Aufgabe 3 – Teil D (6P)

- 1) $A \sim \mathcal{N}(133,25)$ (2P)
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(129 < A < 131) &= \mathbb{P}\left(\frac{129-133}{5} < Z < \frac{131-133}{5}\right) = \mathbb{P}(-0,8 < Z < -0,4) \\ &= \Phi(-0,4) - \Phi(-0,8) = (1 - \Phi(0,4)) - (1 - \Phi(0,8)) \\ &\approx (1 - 0,6554) - (1 - 0,7881) = 0,1327 \end{aligned}$$
- 2) $\mathbb{P}(A \leq a) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{a-133}{5}\right) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \Phi(z) \stackrel{!}{=} 0,1587 \Leftrightarrow z = -1$
also $-1 = \frac{a-133}{5} \Leftrightarrow a = 133 - 5 = 128.$ Das Ergebnis ist also $a = 128$ (2P)
- 3) $A_1 + A_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 2 \cdot 133 = 266$ und $\sigma^2 = 2 \cdot 25 = 50$ (2P)