

Aufgabe 1

In einer Urne befinden sich sechs von 1 bis 6 nummerierte Kugeln unterschiedlicher Farbe: Zwei blaue Kugeln, eine weiße Kugel und drei schwarze Kugeln.

Teil A

Sie ziehen **alle** Kugeln.

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln *ihrer Nummer nach* anzuordnen?

$$P(6) = 6! = 720$$

- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln *ihrer Farbe nach* anzuordnen?

$$P^W(6; 2, 1, 3) = \frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 3!} = 60$$

Teil B

Sie ziehen **4** Kugeln **mit Zurücklegen**.

- c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln auszuwählen, wenn die Reihenfolge der gezogenen Nummern

i) keine Rolle spielt.

ii) eine Rolle spielt.

$$\text{i) } K^W(6; 4) = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\text{ii) } V^W(6; 4) = 6^4 = 1296$$

Teil C

Sie ziehen **4** Kugeln **ohne Zurücklegen**.

- d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln auszuwählen, wenn die Reihenfolge der gezogenen Nummern

i) keine Rolle spielt.

ii) eine Rolle spielt.

$$\text{i) } K(6; 4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

$$\text{ii) } V(6; 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$$

- e) Wie viele Möglichkeiten gibt es,
- 4 Kugeln auszuwählen und *ihrer Farbe nach* anzuordnen,
(*Hinweis*: Überlegen Sie sich, welche Farbkonstellationen in d) i) möglich sind und wie oft jede davon realisiert werden kann.)
 - 4 Kugeln auszuwählen und *ihrer Nummer nach* anzuordnen?

- 1 weiße, 2 blaue, 1 schwarze Kugel(n):

Auswahlmöglichkeiten

$$\binom{1}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1} = 3$$

Anordnungsmöglichkeiten

$$\text{i) } P^W(4; 1, 2, 1) = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$$

- 1 weiße, 1 blaue, 2 schwarze Kugel(n):

Auswahlmöglichkeiten

$$\binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} = 2 \cdot 3 = 6$$

Anordnungsmöglichkeiten

$$\text{i) } P^W(4; 1, 1, 2) = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12$$

- 2 blaue, 2 schwarze Kugel(n):

Auswahlmöglichkeiten

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} = 3$$

Anordnungsmöglichkeiten

$$\text{i) } P^W(4; 2, 2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{12}{2} = 6$$

- 1 blaue, 3 schwarze Kugel(n):

Auswahlmöglichkeiten

$$\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{3} = 2$$

Anordnungsmöglichkeiten

$$\text{i) } P^W(4; 1, 3) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

- 1 weiße, 3 schwarze Kugel(n):

Auswahlmöglichkeiten

$$\binom{1}{1} \cdot \binom{3}{3} = 1$$

Anordnungsmöglichkeiten

$$\text{i) } P^W(4; 1, 3) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

i) Es gibt insgesamt $3 \cdot 12 + 6 \cdot 12 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 138$ Möglichkeiten.

ii) Es gibt insgesamt $(3 + 6 + 3 + 2 + 1) \cdot P(4) = 15 \cdot 4! = 360$ Möglichkeiten.

Alternativ: $V(6; 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$

Aufgabe 2

- a) Sie besitzen zwei Bücher zur *Empirie*, drei Bücher zur *Kombinatorik* und vier Bücher zur *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Die Titel der Bücher sind klar lesbar. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bücher in ein Regal zu stellen, wenn Sie die Bücher
- wahllos einräumen,
 - ihren Themenblöcken nach einräumen,
 - ihren Themenblöcken nach einräumen, wobei ein bestimmter Themenblock in der Mitte stehen soll, und in jedem Themenblock ein bestimmtes Buch ganz links stehen soll?

$$\text{i) } P(9) = 9! = 362.880$$

$$\text{ii) } \underbrace{2! \cdot 3! \cdot 4!}_{\text{Permutation in Blöcken}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{Permutation der Blöcke}} = 1.728$$

$$\text{iii) } \underbrace{(2-1)! \cdot (3-1)! \cdot (4-1)!}_{\text{Permutation in den Blöcken}} \cdot \underbrace{(3-1)!}_{\text{Permutation der Blöcke}} = 24$$

- b) Sie haben den vierstelligen Code Ihres Handys vergessen. Sie erinnern sich nur noch daran, dass zwei Ziffern gleich sind und die Ziffern 3, 5 und 7 irgendwo im Passwort vorkommen. Wie viele mögliche Passwörter müssen Sie ausprobieren, um Ihr Handy zu entsperren?

$$\underbrace{P^W(4; 2, 1, 1)}_{\substack{\text{4-stelliges} \\ \text{Passwort} \\ \text{mit einer} \\ \text{doppelten Ziffer}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{3 verschiedene} \\ \text{doppelte} \\ \text{Ziffern möglich}}} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot 3 = 36$$

- c) Sie möchten ein achtstelliges Passwort für ein Nutzerkonto erstellen. Das Passwort soll genau ein Sonderzeichen aus einer Menge von 30 Sonderzeichen sowie genau einen Großbuchstaben aus 26 möglichen Großbuchstaben enthalten. Die verbleibenden sechs Zeichen dürfen aus den 10 Ziffern oder den 26 Kleinbuchstaben gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Erstellung des Passworts, wenn
- Ziffern und Buchstaben beliebig oft wiederholt werden dürfen.
 - Ziffern und Buchstaben jeweils nur einmal vorkommen dürfen.

$$\text{i) } \underbrace{\binom{30}{1} \cdot \binom{26}{1} \cdot 36^6}_{\text{Auswahlmöglichkeiten der Zeichen}} \cdot \underbrace{8 \cdot 7}_{\substack{\text{Anordnungs-} \\ \text{möglichkeiten} \\ \text{der Zeichen}}} \approx 9,51 \cdot 10^{13}$$

$$\text{ii) } \underbrace{\binom{30}{1} \cdot \binom{26}{1} \cdot \binom{36}{6}}_{\text{Auswahlmöglichkeiten der Zeichen}} \cdot \underbrace{P(8)}_{\substack{\text{Anordnungs-} \\ \text{möglichkeiten} \\ \text{der Zeichen}}} = 30 \cdot 26 \cdot \binom{36}{6} \cdot 8! \approx 6,13 \cdot 10^{13}$$

- d) Sie erstellen eine Playlist auf der Musik-App Ihrer Wahl. Aus 50 als Favorit markierten Songs möchten Sie 9 Songs für Ihre neue Playlist auswählen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielen soll. Ein Song kann mehrfach in die Playlist aufgenommen werden. Wie viele unterschiedliche Playlists aus 9 Songs können Sie erstellen?

$$K^W(50; 9) = \binom{50+9-1}{9} \approx 1,0649 \cdot 10^{10}$$

Aufgabe 3

- a) Zeigen Sie mit einem formalen Rechengang, dass folgende Gleichungen allgemein gelten und verbalisieren Sie ihr Ergebnis.

$$\text{i) } P^W(n; \underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-mal}}) = P(n) \qquad \text{ii) } K(n; n-1) = V(n; 1)$$

$$\text{i) } P^W(n; \underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-mal}}) = \frac{n!}{1! \dots 1!} = \frac{n!}{(1!)^n} = n! = P(n)$$

Wenn wir n Elemente in n unterscheidbare Gruppen mit jeweils genau *einem* Element aufteilen (können), so sind alle Elemente paarweise unterscheidbar, und die Formel für Permutationen mit Wiederholungen reduziert sich auf die Formel für Permutationen ohne Wiederholung.

$$\text{ii) } K(n; n-1) = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = V(n; 1) = n$$

Bei der Kombination wählen wir aus n Elementen genau $n-1$ aus. Das ist äquivalent dazu festzulegen, welches *eine Element im letzten Zug nicht ausgewählt* wird. Dafür gibt es offensichtlich n Möglichkeiten.

Bei der Variation *wählen* wir aus n Elementen genau *ein Element im ersten Zug* aus. Hierfür gibt es auch n Möglichkeiten.

- b) Zeigen Sie mit einem formalen Rechengang, dass die folgenden Ungleichungen für $r > 1$ gelten und verbalisieren Sie ihr Ergebnis.

$$\text{i) } V(n; r) < V^W(n; r) \qquad \text{ii) } K(n; r) < V(n; r)$$

i) Für $r > 1$ gilt:

$$\begin{aligned} V(n; r) &= \frac{n!}{(n-r)!} = \prod_{k=1}^r (n-k+1) \\ &= \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}_{r\text{-mal}} \\ &< \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r\text{-mal}} = n^r = V^W(n; r) \end{aligned}$$

Wird mehr als einmal ($r > 1$) aus einer Urne gezogen und die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt (**Variation**), so unterscheidet sich die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten je nachdem, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird. Beim Ziehen **ohne Zurücklegen** (d.h. ohne Wiederholung) stehen beim ersten Zug n Elemente zur Auswahl, beim zweiten $n-1$, beim dritten $n-2$, usw. Beim letzten Zug stehen $(n-r+1)$ Elemente zur Auswahl. Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten nimmt also mit jedem Zug ab.

Wird dagegen **mit Zurücklegen** (d.h. mit Wiederholung) gezogen, so stehen bei jedem Zug n Elemente zur Auswahl. Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten bleibt daher in jedem Zug gleich. Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ist also beim Ziehen mit Zurücklegen größer.

ii) Für $r > 1$ gilt:

$$K(n; r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} < \frac{n!}{(n-r)!} = V(n; r)$$

Wird mehr als einmal ($r > 1$) aus einer Urne *ohne Zurücklegen* (d.h. ohne Wiederholung) gezogen, so unterscheidet sich die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten je nachdem, ob die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt (Variation) oder nicht berücksichtigt (Kombination) wird.

Wählt man r unterscheidbare Elemente aus n Elementen aus, so lassen sich diese r Elemente auf $r!$ verschiedene Arten *anordnen* (Permutation).

Bei der **Variation ohne Wiederholung** werden dieselben $r!$ Anordnungen als $r!$ *verschiedene (geordnete) Auswahlen* (Variation) gezählt.

Bei der **Kombination ohne Wiederholung** werden die $r!$ möglichen Anordnungen von r ausgewählten Elementen zu *einer einzigen (ungeordneten) Auswahl* (Kombination) zusammengefasst; in der Formel muss man also durch $r!$ teilen. Das bedeutet, jede Kombination entspricht genau $r!$ verschiedenen Variationen, weshalb die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten bei Kombinationen kleiner ist.

- c) Erklären Sie, wie sich die Formel der Kombination ohne Wiederholung aus der Permutation mit Wiederholung ergibt.

Bei einer **Kombination ohne Wiederholung** werden r Elemente aus n unterscheidbaren Elementen ausgewählt, ohne die Reihenfolge zu beachten und ohne Zurücklegen (d.h. ohne Wiederholung). Zunächst betrachtet man alle möglichen Anordnungen der n unterscheidbaren Elemente, was $n!$ Anordnungsmöglichkeiten ergibt (Permutation).

Da nur r Elemente ausgewählt werden, werden die übrigen $(n - r)$ Elemente nicht berücksichtigt; dies wird durch Division durch $(n - r)!$ korrigiert. Außerdem spielt die Reihenfolge der r ausgewählten Elemente keine Rolle, weshalb man zusätzlich durch $r!$ teilt.

$$K(n; r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

Da die Reihenfolge der r ausgewählten und der $(n - r)$ nicht-ausgewählten Elemente keine Rolle spielt, können die Elemente innerhalb jeder Gruppe als *nicht unterscheidbar* betrachtet werden. Auf diese Weise entsteht eine Einteilung der n Elemente in *zwei unterscheidbare Gruppen*:

- die r ausgewählten Elemente,
- die $n - r$ nicht ausgewählten Elemente.

Dies entspricht genau der Definition einer **Permutation mit Wiederholung** für zwei Gruppen:

$$P^W(n; \underbrace{p, q}_{2 \text{ Gruppen}}) = \frac{n!}{p! \cdot q!} \quad \text{mit } p := r \quad \text{und} \quad q := n - r.$$