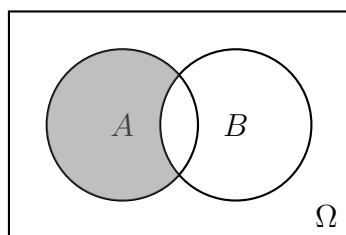


**Aufgabe 1**

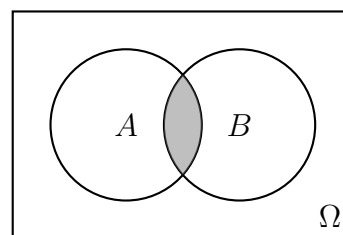
Sei  $\Omega$  die Grundmenge. Betrachten Sie die beiden Ereignisse  $A$  und  $B$  mit  $A, B \subseteq \Omega$ . Nehmen Sie an, die beiden Ereignisse  $A$  und  $B$  sind nicht disjunkt, also  $A \cap B \neq \emptyset$ .

- a) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Mengenoperation dar und markieren Sie diese in einem Venn-Diagramm.
- i)  $A$  tritt ein,  $B$  jedoch nicht.
  - ii)  $A$  und  $B$  gleichzeitig treten ein.
  - iii) Weder  $A$  noch  $B$  treten ein.
  - iv) Höchstens eins der beiden Ereignisse tritt ein.
  - v) Genau eins der beiden Ereignisse tritt ein.

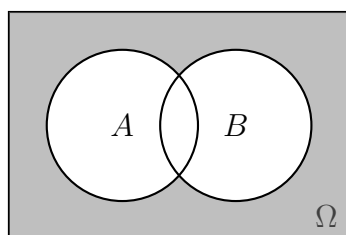
i)  $(A \cap \bar{B}) = (A \setminus B)$



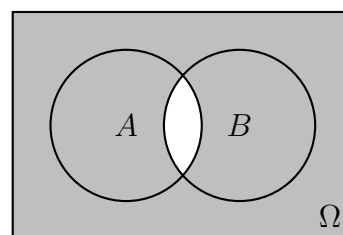
ii)  $(A \cap B)$



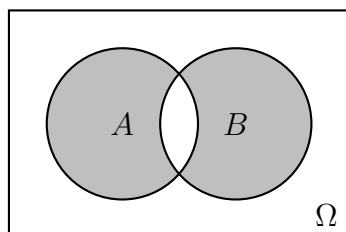
iii)  $(\bar{A} \cap \bar{B}) = (\overline{A \cup B})$



iv)  $(\overline{A \cap B})$



v)  $((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B))$



$A$  tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,6$  und  $B$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,7$  ein. Mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0,2$  tritt keins der beiden Ereignisse ein.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- i) tritt  $A$  nicht ein?
- ii) treten  $A$  und  $B$  gleichzeitig ein?
- iii) tritt  $A$  ein, wenn  $B$  eingetreten ist?
- iv) tritt  $A$  nicht ein, wenn  $B$  eingetreten ist?
- v) tritt  $A$  ein, wenn  $B$  nicht eingetreten ist?

Geben Sie eine jeweils eine kurze Begründung.

i) Mit der *Normiertheit* und der *Additivität* von  $\mathbb{P}$  (vgl. 2. Axiom und 3. Axiom von Kolmogorov) gilt:

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0,6 = 0,4$$

ii) Mit dem *Allgemeinen Additionssatz* gilt:

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cup B)}_{\stackrel{!}{=} 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})} = 0,6 + 0,7 - (1 - 0,2) = 0,5$$

iii) Mit dem *Satz von Bayes* gilt:

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,5}{0,7} = \frac{5}{7}$$

iv) Mit den Regeln für die *Komplementbildung unter bedingten Wahrscheinlichkeiten* gilt:

$$\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

v) Mit dem *Satz von Bayes*, dem *Venn-Diagramm in a) i)* und der *Normiertheit* und der *Additivität* von  $\mathbb{P}$  gilt:

$$\mathbb{P}(A|\bar{B}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})} = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(B)} = \frac{0,6 - 0,5}{1 - 0,7} = \frac{1}{3}$$

Nehmen Sie nun an, die Ereignisse  $A$  und  $B$  seien disjunkt, also  $A \cap B = \emptyset$ .

c) Begründen Sie, warum  $A$  und  $B$  nun stochastisch abhängig voneinander sind.

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen *disjunkt*, wenn  $A \cap B = \emptyset$ . Für nichttriviale Ereignisse (d.h.  $\mathbb{P}(A) > 0$  und  $\mathbb{P}(B) > 0$ ) gilt in diesem Fall, dass sie nicht gleichzeitig eintreten können. Das Wissen über das Eintreten des einen Ereignisses liefert somit Informationen über das Nicht-Eintreten des anderen Ereignisses, weshalb disjunkte Ereignisse *stochastisch abhängig* sind.

## Aufgabe 2

Die Berliner S- und U-Bahnen sind immer wieder von wetterbedingten Ausfällen betroffen, insbesondere bei Unwetter. Beide Umstände treten, bedingt auf die Wetterlage (Unwetter oder kein Unwetter), unabhängig voneinander auf. Die Ausfallwahrscheinlichkeit der S-Bahn beträgt bei Unwetter 30%, die der U-Bahn 10%. Die U-Bahn fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% aus, wenn kein Unwetter herrscht. Zudem ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die S-Bahn nicht ausfällt und gleichzeitig kein Unwetter vorliegt, 64% beträgt. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Unwetter über das Jahr hinweg konstant ist und 20% beträgt. Es seien die folgenden Ereignisse definiert:

$W :=$  „Es gibt ein Unwetter.“

$S :=$  „Die S-Bahn fällt aus.“

$U :=$  „Die U-Bahn fällt aus.“

a) Formulieren Sie mithilfe der Ereignisse  $W$ ,  $S$ ,  $U$  die oben genannten Wahrscheinlichkeitsaussagen.

$$\mathbb{P}(W) = 0,2$$

$$\mathbb{P}(S|W) = 0,3$$

$$\mathbb{P}(U|W) = 0,1$$

$$\mathbb{P}(U|\bar{W}) = 0,05$$

$$\mathbb{P}(\bar{S} \cap \bar{W}) = 0,64$$

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss man in Berlin an einem zufällig ausgewählten Tag mit dem Ausfall
- i) der S-Bahn, bei keinem Unwetter rechnen?
  - ii) der S-Bahn rechnen?
  - iii) der U-Bahn rechnen?
  - iv) beider Bahnen rechnen?
  - v) der S-Bahn rechnen, wenn die U-Bahn ausgefallen ist?
  - vi) mindestens einer der Bahnen rechnen?
  - vii) nur der U-Bahn rechnen?

i)  $\mathbb{P}(S|\bar{W}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{S}|\bar{W}) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\bar{S} \cap \bar{W})}{\mathbb{P}(\bar{W})} = 1 - \frac{0,64}{0,8} = 0,2$

ii)  $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|W) \cdot \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(S|\bar{W}) \cdot \mathbb{P}(\bar{W}) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,22$

iii)  $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(U|W) \cdot \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(U|\bar{W}) \cdot \mathbb{P}(\bar{W}) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,8 = 0,06$

iv)  $\mathbb{P}(S \cap U) = \mathbb{P}(S \cap U|W) \cdot \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(S \cap U|\bar{W}) \cdot \mathbb{P}(\bar{W})$   
 $= \mathbb{P}(S|W) \cdot \mathbb{P}(U|W) \cdot \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(S|\bar{W}) \cdot \mathbb{P}(U|\bar{W}) \cdot \mathbb{P}(\bar{W})$   
 $= 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,05 \cdot 0,8 = 0,014$

v)  $\mathbb{P}(S|U) = \frac{\mathbb{P}(S \cap U)}{\mathbb{P}(U)} = \frac{0,014}{0,06} \approx 0,233$

vi)  $\mathbb{P}(S \cup U) = \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(U) - \mathbb{P}(S \cap U) = 0,22 + 0,06 - 0,014 = 0,266$

vii)  $\mathbb{P}(U \cap \bar{S}) = \mathbb{P}(U) - \mathbb{P}(S \cap U) = 0,06 - 0,014 = 0,046$

- c) Sind  $S$  und  $U$  stochastisch unabhängig?

$\mathbb{P}(S|U) \approx 0,233 \neq 0,22 = \mathbb{P}(S)$   
Alternativ:  $\mathbb{P}(S \cap U) = 0,014 \neq 0,0132 = \mathbb{P}(S) \cdot \mathbb{P}(U)$   
Die Ereignisse  $S$  und  $U$  sind stochastisch abhängig.

### Aufgabe 3

Es werden zwei faire Würfel gleichzeitig geworfen, ein weißer und ein roter. Es seien die folgenden Ereignisse definiert:

$A :=$  „Die geworfene Augenzahl des weißen Würfels ist gerade.“

$B :=$  „Die geworfene Augenzahl des roten Würfels ist ungerade.“

$C :=$  „Die Summe der geworfenen Augenzahlen ist gerade.“

#### Teil A

a) Wieso handelt es sich um ein Zufallsexperiment? Was ist zufällig?

Es handelt sich um ein Zufallsexperiment, da die physikalischen Einflussgrößen des Wurfs nicht vollständig kontrollierbar sind, sodass der *Ausgang* nicht deterministisch vorhergesagt werden kann und als *zufällig* gilt.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

• „Wurf des weißen Würfels“:  $\Omega_w = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $A = \{2, 4, 6\}$ .  
 $\Rightarrow$  Laplace:  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_w|} = \frac{3}{6} = 0,5$

• „Wurf des roten Würfels“:  $\Omega_r = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $A = \{1, 3, 5\}$ .  
 $\Rightarrow$  Laplace:  $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega_r|} = \frac{3}{6} = 0,5$

• „gleichzeitiger Wurf eines weißen und eines roten Würfels“:  
 $\Omega = \Omega_r \times \Omega_w = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 \Rightarrow |\Omega| = 36$

Die Summe zweier Augenzahlen ist genau dann gerade, wenn beide Augenzahlen gerade oder beide Augenzahlen ungerade sind. Auf jedem Würfel gibt es drei gerade Zahlen und drei ungerade Zahlen.  $\Rightarrow |C| = (3 \cdot 3) \cdot 2 = 18$

$\Rightarrow$  Laplace:  $\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = 0,5$

**Teil B**

Es seien die folgenden Ereignissen definiert:

$$E := A \cap B = \{(2, 1); (2, 3); (2, 5); (4, 1); (4, 3); (4, 5); (6, 1); (6, 3); (6, 5)\}$$

$$F := A \cap C = \{(2, 2); (2, 4); (2, 6); (4, 2); (4, 4); (4, 6); (6, 2); (6, 4); (6, 6)\}$$

$$G := B \cap C = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 1); (5, 3); (5, 5)\}$$

$$H := A \cap B \cap C$$

c) Aus welchen Elementen von  $\Omega$  setzt sich das Ereignis  $H$  zusammen?

$$H = E \cap C = \{\} = \emptyset$$

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $E, F, G, H$ .

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{9}{36}, \quad \mathbb{P}(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{9}{36}, \quad \mathbb{P}(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(H) = \frac{|H|}{|\Omega|} = 0$$

e) Definieren Sie das Komplementärereignis

i)  $\bar{E}$  mithilfe von  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$

ii)  $\bar{H}$  mithilfe von  $\bar{F}$  und  $\bar{G}$

als Mengenoperation.

$$\text{i) } \bar{E} = \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\text{ii) } \bar{H} = \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cap C \cap B \cap C} = \overline{(A \cap C) \cap (B \cap C)} = \bar{F} \cap \bar{G} = \bar{F} \cup \bar{G}$$

f) Sind die Ereignisse  $A, B, C$

i) paarweise

ii) vollständig

stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre jeweilige Antwort mit Hilfe eines formalen Rechenganges.

i) Die Ereignisse  $A, B, C$  sind **paarweise** stochastisch unabhängig, da gilt:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

ii) Die Ereignisse  $A, B, C$  sind **nicht vollständig** stochastisch unabhängig, da gilt:

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$