Aufgabe 1

Teil A

Betrachtet wird das folgende Zufallsexperiment: Eine faire Münze wird **einmal** geworfen. Fällt Zahl, so erhalten Sie 1,5 Euro; fällt Kopf so erhalten Sie 0 Euro.

a) Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable X, die den Auszahlungsbetrag in Euro beschreibt. Geben Sie den Definitions– und Wertebereich von X an. Ist X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable? Begründen Sie.

b) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X. Wie ist X verteilt?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und interpretieren Sie diese Kennzahlen im Kontext der Aufgabe.

d) Das beschriebene Zufallsexperiment wird nun unabhängig 10-mal wiederholt. Sie beobachten 4-mal Kopf und 6-mal Zahl. Skizzieren Sie die empirische relative Häufigkeitsfunktion von X unter der beobachteten Stichprobe in einem Stabdiagramm. Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Varianz.

e) Wie vermuten Sie, verändern sich die in d) berechneten empirischen Kennzahlen bei einem unendlich-fachen Münzwurf. Wie würde die empirische relative Häufigkeitsfunktion von X nun aussehen?

Teil B

Sei nun das Zufallsexperiment eines **dreifachen** Wurfs einer fairen Münze gegeben. Es werden zwei unterschiedliche Auszahlungsregeln betrachtet:

Regel 1 Der Auszahlungsbetrag entspricht der Anzahl der geworfenen Ergebnisse „Kopf“.

Regel 2 Es wird ausschließlich das Ergebnis des ersten Wurfs berücksichtigt:

- Zeigt der erste Wurf „Kopf“, so erhalten Sie 0 Euro.
- Zeigt der erste Wurf „Zahl“, so erhalten Sie 3 Euro.

Sei Q der Auszahlungsbetrag nach Regel 1 und R der Auszahlungsbetrag nach Regel 2.

f) Geben Sie die Ergebnismenge Ω dieses Zufallsexperiments (3-facher Münzwurf) an und berechnen Sie $|\Omega|$. Liegt ein Laplace-Experiment vor?

g) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Q tabellarisch an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Q.

h) Erläutern Sie, dass die Gesamtheit der Wahrscheinlichkeiten aller Realisierungen von Q eine Wahrscheinlichkeitsverteilung bildet.

i) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von R tabellarisch an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von R.

j) Entscheiden Sie, welche Regel Sie theoretisch bevorzugen würden. Diskutieren Sie, welche Rolle die Varianz für Ihre Entscheidung spielen könnte.

Teil C

Nun werden beide Regeln **gleichzeitig** auf das Ergebnis des dreifachen Münzwurfs angewendet. Sei $M := Q \cdot R$ die Zufallsvariable, die dem Zufallsexperiment zugrunde liegt, bei dem Regel 1 den Basisauszahlungsbetrag bestimmt und Regel 2 diesen vervielfachen kann.

k) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von M. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von M.

l) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses $\{M \geq 3\}$ und visualisieren sie diese in der Wahrscheinlichkeitsfunktion von M.

m) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen Q und R und interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

n) Sind Q und R stochastisch unabhängig?

Darüber hinaus sei eine weitere Zufallsvariable $S := Q + R$ definiert.

o) Definieren Sie S inhaltlich.

p) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S.

Teil D

Zur Analyse des Zusammenhangs zwischen den beiden Regeln wird nun die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen Q und R betrachtet.

q) Geben Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von (Q, R) tabellarisch an.

r) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{Q > 1\} \cap \{R = 3\}$.

s) Prüfen Sie anhand der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion, ob Q und R stochastisch unabhängig sind.

t) Ermitteln und skizzieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von Q, falls $R = 0$.