

Aufgabe 1

Teil A

Betrachtet wird das folgende Zufallsexperiment: Eine faire Münze wird **einmal** geworfen. Fällt Zahl, so erhalten Sie 1,5 Euro; fällt Kopf so erhalten Sie 0 Euro.

- a) Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable X , die den Auszahlungsbetrag in Euro beschreibt. Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von X an. Ist X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable? Begründen Sie.

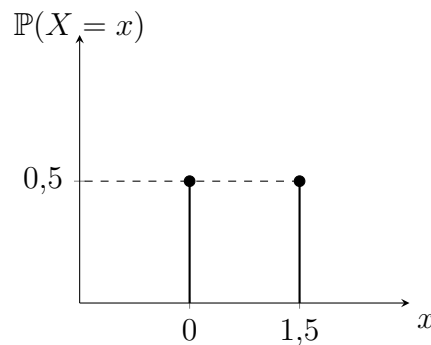
Sei $X: \Omega \rightarrow A$ mit

$$X := \begin{cases} 1,5, & \text{falls Zahl,} \\ 0, & \text{falls Kopf.} \end{cases}$$

und dem Definitionsbereich $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\} = \{K, Z\}$ und dem Wertebereich $A = \{1,5; 0\}$. Die Zufallsvariable X ist *diskret*, da sie nur endlich viele Werte annimmt.

- b) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X . Wie ist X verteilt?

Wahrscheinlichkeitsfunktion von X :



Die Zufallsvariable X ist *diskret gleichverteilt auf* $\{0; 1,5\}$.

- c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und interpretieren Sie diese Kennzahlen im Kontext der Aufgabe.

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1,5 \cdot \mathbb{P}(X = 1,5) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1,5 \cdot \frac{1}{2} = 0,75,$$

Wird das Zufallsexperiment (einfacher Münzwurf) *unendlich oft wiederholt*, so ist ein *durchschnittlicher* Auszahlungsbetrag von 0,75 Euro pro Wurf *zu erwarten*.

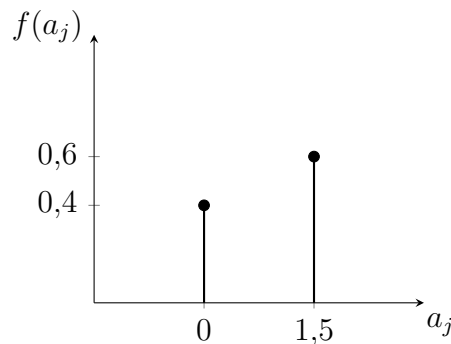
$$\text{Var}(X) = (0 - 0,75)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1,5 - 0,75)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

(Alternativ mittels der Formel $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.)

Die theoretische, zu erwartende quadratische Abweichung des Auszahlungsbetrags vom Erwartungswert beträgt $\frac{9}{16} = 0,5625$ Euro².

- d) Das beschriebene Zufallsexperiment wird nun unabhängig 10-mal wiederholt. Sie beobachten 4-mal Kopf und 6-mal Zahl. Skizzieren Sie die empirische relative Häufigkeitsfunktion von X unter der beobachteten Stichprobe in einem Stabdiagramm. Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Varianz.

Empirische relative Häufigkeitsfunktion von X :



$$\bar{x} = \sum_{j=1}^2 a_j \cdot f(a_j) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1,5 \cdot \frac{6}{10} = 0,9$$

$$s^2 = \sum_{j=1}^2 (a_j - \bar{x})^2 \cdot f(a_j) = (0 - 0,9)^2 \cdot \frac{4}{10} + (1,5 - 0,9)^2 \cdot \frac{6}{10} = 0,54$$

- e) Wie vermuten Sie, verändern sich die in d) berechneten empirischen Kennzahlen bei einem unendlich-fachen Münzwurf. Wie würde die empirische relative Häufigkeitsfunktion von X nun aussehen?

Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die in d) berechneten empirischen Kennzahlen gegen ihre theoretischen Werte, sodass

$$\bar{x} \approx \mathbb{E}(X) \quad \text{und} \quad s^2 \approx \text{Var}(X)$$

gilt. Die empirische relative Häufigkeitsfunktion $f(a_j)$ stimmt mit wachsendem Stichprobenumfang „immer besser“ mit der theoretischen Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbb{P}(X = x)$ überein.

Teil B

Sei nun das Zufallsexperiment eines **dreifachen** Wurfs einer fairen Münze gegeben. Es werden zwei unterschiedliche Auszahlungsregeln betrachtet:

Regel 1 Der Auszahlungsbetrag entspricht der Anzahl der geworfenen Ergebnisse „Kopf“.

Regel 2 Es wird ausschließlich das Ergebnis des ersten Wurfs berücksichtigt:

- Zeigt der erste Wurf „Kopf“, so erhalten Sie 0 Euro.
- Zeigt der erste Wurf „Zahl“, so erhalten Sie 3 Euro.

Sei Q der Auszahlungsbetrag nach Regel 1 und R der Auszahlungsbetrag nach Regel 2.

- f) Geben Sie die Ergebnismenge Ω dieses Zufallsexperiments (3-facher Münzwurf) an und berechnen Sie $|\Omega|$. Liegt ein Laplace-Experiment vor?

$$\Omega = \{(KKK); (KKZ); (KZK); (ZKK); (KZZ); (ZKZ); (ZZK); (ZZZ)\}$$
$$|\Omega| = 8 \quad \text{oder} \quad |\Omega| = V^W(2; 3) = 2^3 = 8$$

Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{8}$ besitzen.

- g) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Q tabellarisch an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Q .

Wahrscheinlichkeitsfunktion für $Q \in \{0, 1, 2, 3\}$:

q	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Q = q)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mathbb{E}(Q) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$$

$$\text{Var}(Q) = \mathbb{E}(Q^2) - [\mathbb{E}(Q)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75,$$

$$\text{wobei } \mathbb{E}(Q^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

- h) Erläutern Sie, dass die Gesamtheit der Wahrscheinlichkeiten aller Realisierungen von Q eine Wahrscheinlichkeitsverteilung bildet.

$(\mathbb{P}(Q = 0), \mathbb{P}(Q = 1), \mathbb{P}(Q = 2), \mathbb{P}(Q = 3)) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Q , da die Wahrscheinlichkeit jedes Einzelereignisses jeweils größer oder gleich null ist und sich alle zusammen zu 1 aufsummieren.

- i) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von R tabellarisch an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von R .

Wahrscheinlichkeitsfunktion für $R \in \{0, 3\}$:

r	0	3
$\mathbb{P}(R = r)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}(R) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5$$

$$\text{Var}(R) = \mathbb{E}(R^2) - [\mathbb{E}(R)]^2 = 4,5 - 1,5^2 = 2,25,$$

$$\text{wobei } \mathbb{E}(R^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = 4,5$$

Alternativ:

$$\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(2X) = 2 \cdot \mathbb{E}(X) \stackrel{c)}{=} 2 \cdot 0,75 = 1,5$$

$$\text{Var}(R) = \text{Var}(2X) = 2^2 \cdot \text{Var}(X) \stackrel{c)}{=} 4 \cdot \frac{9}{16} = 2,25$$

- j) Entscheiden Sie, welche Regel Sie theoretisch bevorzugen würden. Diskutieren Sie, welche Rolle die Varianz für Ihre Entscheidung spielen könnte.

Da $\mathbb{E}(Q) = \mathbb{E}(R) = 1,5$ gilt, sind beide Regeln hinsichtlich des Erwartungswertes „gleichwertig“. Für die Entscheidung kann daher die Varianz als Maß der Unsicherheit herangezogen werden. Da $\text{Var}(Q) = 0,75 < 2,25 = \text{Var}(R)$ gilt, ist Regel 1 für risikoaverse Personen zu bevorzugen, während Regel 2 für risikofreudige Personen attraktiver ist.

Teil C

Nun werden beide Regeln **gleichzeitig** auf das Ergebnis des dreifachen Münzwurfs angewendet. Sei $M := Q \cdot R$ die Zufallsvariable, die dem Zufallsexperiment zugrunde liegt, bei dem Regel 1 den Basisauszahlungsbetrag bestimmt und Regel 2 diesen vervielfachen kann.

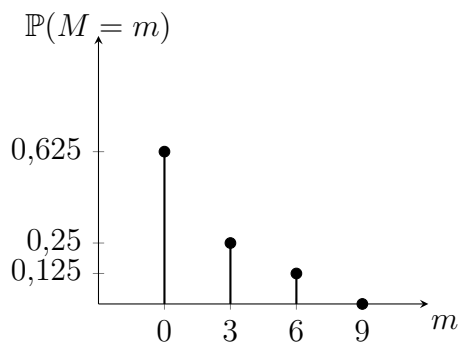
- k) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von M . Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von M .

Vorüberlegung:

Wir überlegen zunächst welche Werte M annehmen kann. Es ist $M = Q \cdot R$ mit $Q \in \{0, 1, 2, 3\}$, $R \in \{0, 3\}$. Also $M \in \{0 \cdot 0, 0 \cdot 3, 1 \cdot 0, 1 \cdot 3, 2 \cdot 0, 2 \cdot 3, 3 \cdot 0, 3 \cdot 3\} = \{0, 3, 6, 9\}$. Für $M: \Omega \rightarrow \{0, 3, 6, 9\}$ gilt nun

$$M(KKK) = M(KKZ) = M(KZK) = M(KZZ) = M(ZZZ) = 0, \\ M(ZKZ) = M(ZZK) = 3 \quad \text{und} \quad M(ZKK) = 6.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion für $M \in \{0, 3, 6, 9\}$:



Fortsetzung zu k):

$$\mathbb{E}(M) = 0 \cdot \frac{5}{8} + 3 \cdot \frac{2}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot 0 = 1,5$$

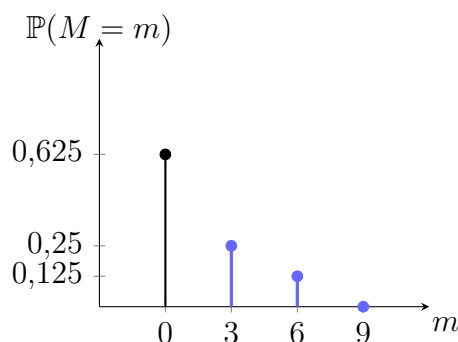
$$\text{Var}(M) = \mathbb{E}(M^2) - [\mathbb{E}(M)]^2 = 6,75 - 1,5^2 = 4,5,$$

$$\text{wobei } \mathbb{E}(M^2) = 0^2 \cdot \frac{5}{8} + 3^2 \cdot \frac{2}{8} + 6^2 \cdot \frac{1}{8} + 9^2 \cdot 0 = 6,75$$

- l) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses $\{M \geq 3\}$ und visualisieren sie diese in der Wahrscheinlichkeitsfunktion von M .

$$\mathbb{P}(M \geq 3) = \mathbb{P}(M = 3) + \mathbb{P}(M = 6) + \mathbb{P}(M = 9) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}$$

$$\text{Alternativ: } \mathbb{P}(M \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(M < 3) = 1 - \mathbb{P}(M = 0) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$



- m) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen Q und R und interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

$$\text{Cov}(Q, R) = \underbrace{\mathbb{E}(Q \cdot R)}_{=\mathbb{E}(M)} - \mathbb{E}(Q) \cdot \mathbb{E}(R) = 1,5 - 1,5 \cdot 1,5 = -0,75$$

Zwischen den beiden Auszahlungsregeln liegt ein negativer linearer Zusammenhang vor, d.h. dies bedeutet, dass hohe Auszahlungen nach Regel 1 tendenziell mit niedrigen Auszahlungen nach Regel 2 einhergehen und umgekehrt.

- n) Sind Q und R stochastisch unabhängig?

$$\text{Cov}(Q, R) \stackrel{m)}{=} -0,75 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Q \text{ und } R \text{ sind stochastisch abhängig.}$$

Darüber hinaus sei eine weitere Zufallsvariable $S := Q + R$ definiert.

o) Definieren Sie S inhaltlich.

S : „Gemeinsamer Auszahlungsbetrag nach Regel 1 und Regel 2“

p) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S .

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(Q + R) = \mathbb{E}(Q) + \mathbb{E}(R) = 1,5 + 1,5 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \text{Var}(Q + R) = \text{Var}(Q) + \text{Var}(R) + 2 \cdot \text{Cov}(Q, R) \\ &= 0,75 + 2,25 + 2 \cdot (-0,75) = 1,5 \end{aligned}$$

Teil D

Zur Analyse des Zusammenhangs zwischen den beiden Regeln wird nun die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen Q und R betrachtet.

q) Geben Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von (Q, R) tabellarisch an.

Vorüberlegung:

Nach beiden Regeln kann nicht gleichzeitig der minimalen oder maximalen Betrag ausgezahlt werden. Somit ist $\mathbb{P}(Q = 0, R = 0) = \mathbb{P}(Q = 3, R = 3) = 0$.

Weiter ist $\mathbb{P}(Q = 2, R = 0) = \mathbb{P}(\{KZK\}) + \mathbb{P}(\{KKZ\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$.

Die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion von (Q, R) ergeben sich aus den vorgegeben Randverteilungen durch Normierung der Zeilen- und Spaltensummen.

$R \backslash Q$	0	1	2	3	Σ
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
Σ	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

r) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{Q > 1\} \cap \{R = 3\}$.

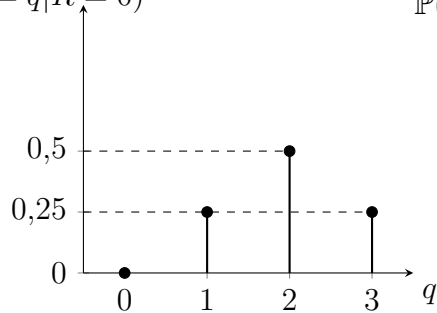
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Q > 1\} \cap \{R = 3\}) &= \mathbb{P}(Q > 1, R = 3) \\ &= \mathbb{P}(Q = 2, R = 3) + \mathbb{P}(Q = 3, R = 3) \\ &= \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

- s) Prüfen Sie anhand der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion, ob Q und R stochastisch unabhängig sind.

z.B. $\mathbb{P}(Q = 0, R = 0) = 0 \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \mathbb{P}(Q = 0) \cdot \mathbb{P}(R = 0)$
 $\Rightarrow Q$ und R sind stochastisch abhängig.

- t) Ermitteln und skizzieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von Q , falls $R = 0$.

$\mathbb{P}(Q = q | R = 0)$



$$\mathbb{P}(Q = q | R = 0) = \frac{\mathbb{P}(Q = q, R = 0)}{\mathbb{P}(R = 0)}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{8}, & \text{falls } q = 1, \\ \frac{4}{8}, & \text{falls } q = 2, \\ \frac{4}{8}, & \text{falls } q = 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$