Aufgabe 1

Ein Streamingdienst entwirft einen neuen Algorithmus zur Serienempfehlung. Für eine zufällig ausgewählte Nutzerin bzw. einen zufällig ausgewählten Nutzer gilt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 klickt die Person nach dem Einloggen mindestens eine empfohlene Serie an. Der Streamingdienst betrachtet 30 zufällig ausgewählte Nutzerinnen und Nutzer. Es wird angenommen, dass das Klickverhalten einer Person keinen Einfluss auf das Klickverhalten anderer Personen hat. Seien

X_i : „Die i-te Person klickt mindestens eine empfohlene Serie an“ und

Y : „Anzahl der Personen, die mindestens eine empfohlene Serie anklicken“.

a) Wie ist die Zufallsvariable X_i verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

b) Was bedeutet es, wenn man davon spricht, dass die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_{30}$ „iid“ sind? Ist diese Annahme laut Aufgabenstellung erfüllt?

c) Definieren Sie die Zufallsvariable Y als Funktion der Zufallsvariablen X_1,...,X_{30}. Wie ist die Zufallsvariable Y verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

   i) genau 5 Personen mindestens eine empfohlene Serie anklicken,

   ii) höchstens 18 Personen mindestens eine empfohlene Serie anklicken,

   iii) mindestens 9 Personnen mindestens eine empfohlene Serie anklicken,

   vi) mehr als 10, aber weniger als 25 Personen mindestens eine empfohlene Serie anklicken.

Aufgabe 2

Klickt ein Kunde in der App eines Lieferservices auf „Bestellung abschicken“, schlägt manchmal die Zahlung fehl, sodass der Zahlungsvorgang wiederholt werden muss. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Zahlungsversuch erfolgreich ist, beträgt 0,8. Die Ausgänge der Zahlungsversuche sind unabhängig voneinander. Sei

X : „Anzahl der Zahlungsversuche bis zur ersten erfolgreichen Zahlung“.

a) Wie ist die Zufallsvariable X verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   i) die erste Zahlung bereits beim ersten Versuch erfolgreich ist,
   ii) mindestens zwei Fehlversuche auftreten, bevor die Zahlung erfolgreich ist.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie diesen im Kontext der Aufgabe.

d) Zeigen Sie durch einen formalen Rechenschritt, dass $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, gilt, wobei F die Verteilungsfunktion von X beschreibt.

Aufgabe 3

Eine Person erhält einen Katalog mit 10 Prüfungsfragen, von denen 6 so schwer sind, dass sie von niemandem gelöst werden können. Die Person darf nun zufällig 3 Fragen aus dem Katalog für die Prüfung auswählen. Sei

X : „Anzahl der ausgewählten lösbaren Fragen“.

a) Wie ist die Zufallsvariable X verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

b) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion von X.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   i) die Person alle 3 Fragen richtig lösen kann,
   ii) die Person genau 3 lösbare Fragen auswählt,
   iii) die Person mindestens eine lösbare Frage auswählt,
   iv) die zweite von der Person ausgewählte Frage lösbar ist.

Aufgabe 4

Teil A

Erfahrungsgemäß erscheinen 10% der Fluggäste mit gültigem Ticket nicht zum Abflug, wobei das (Nicht-)Erscheinen einer Personen keinen Einfluss auf das (Nicht-)Erscheinen anderer Personen hat. Auf Basis dieser Information verkauft die Fluggesellschaft 29 Flugtickets für 26 verfügbare Sitzplätze eines Flugs von Mannheim nach Berlin. Sei

X : „Anzahl der erscheinenden Passagiere für Flug von Mannheim nach Berlin“.

a) Wie ist die Zufallsvariable X verteilt (Verteilungstyp und -parameter)? Wieso ist die Annahme „*Das (Nicht-)Erscheinen einer Personen hat keinen Einfluss auf das (Nicht-)Erscheinen anderer Personen.*“ hier wichtig?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle erscheinenden Fluggäste einen Sitzplatz erhalten.

c) Die Fluggesellschaft bietet zusätzlich einen Flug von Mannheim nach Sylt an, bei dem 30 Tickets für 26 Plätze verkauft wurden. Ob die Passagiere für den Flug von Mannheim nach Berlin erscheinen oder nicht, hat keinen Einfluss auf das (Nicht-) Erscheinen der Passagiere des Flugs von Mannheim nach Sylt. Bestimmen Sie die Verteilung (Verteilungstyp und -parameter) der Zufallsvariable

G : „Anzahl erscheinender Passagiere beider Flüge“.

Teil B

Für die Fluggesellschaft ist nun ausschließlich relevant, ob es zu einer Überbuchung auf dem Flug nach Berlin kommt oder nicht.

d) Definieren Sie auf Basis der Zufallsvariable X eine geeignete Zufallsvariable D, die das Auftreten einer Überbuchung modelliert. Wie ist die Zufallsvariable D verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

e) Berechnen Sie den Erwartungswert von D und interpretieren Sie diesen im Kontext der Aufgabe.