Aufgabe 1

Sie machen einen Morgenspaziergang durch den Grunewald mit der Hoffnung Rehe zu sichten. Rehsichtungen treten räumlich zufällig und unabhängig voneinander auf. Sie durchstreifen eine Fläche von 1000 Ar (1 $Ar = 100m^2$). Seien

$$X: \text{„Anzahl der Rehsichtungen auf der durchstreiften Fläche“},$$

$$Y: \text{„Anzahl der Rehsichtungen auf 500 } Ar\text{“}.$$

Teil A

Gehen Sie davon aus, dass es im Grunewald pro 1000 Ar durchschnittlich 6 Rehsichtungen gibt.

a) Wie sind die Zufallsvariablen X und Y jeweils verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie

   i) genau zwei Rehsichtungen,

   ii) höchstens vier Rehsichtungen,

   iii) mindestens drei, aber weniger als sieben Rehsichtungen,

   machen, wenn Sie eine Fläche von 1000 Ar durchstreifen.

Teil B

Gehen Sie nun davon aus, dass man auf jedem Ar Wald mit Wahrscheinlichkeit 0,006 eine Rehsichtung macht.

c) Wie ist die Zufallsvariable X

   i) exakt,

   ii) approximativ

   verteilt (Verteilungstyp und -parameter)? Prüfen Sie die Approximationskriterien.

Aufgabe 2

Ein schwedisches Unternehmen vertreibt Smart-Home Glühbirnen. Es ist bekannt, dass sich eine Glühbirne mit Wahrscheinlichkeit 0,4 nicht mit dem Smart-Home System verbinden lässt und somit als *fehlerhaft* gilt. Die Glühbirnen werden einzeln verpackt und versendet. Sei für $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Y_r : „Anzahl der versendeten Pakete bis zur r-ten fehlerhaften Glühbirne“.

a) Wie ist die Zufallsvariable Y_r in Abhängigkeit von r verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich im zehnten Versandpaket die dritte fehlerhafte Glühbirne?

c) Zeigen Sie formal, dass der folgender Zusammenhang gilt. Beschreiben Sie diesen in Worten und begründen Sie.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

d) Zeigen Sie formal, dass die Wahrscheinlichkeit in b) auch mithilfe der Zufallsvariable Z : „Anzahl der fehlerhaften Pakete bei neun versendeten Paketen“ berechnet werden kann. Beschreiben Sie diesen Zusammenhang inhaltlich.

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der versendeten Glühbirnen bis zum Auftreten der dritten fehlerhaften Glühbirne.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich im fünften Versandpaket die erste fehlerhafte Glühbirne?

g) Welcher Verteilung folgt Y_1 noch? Begründen Sie.

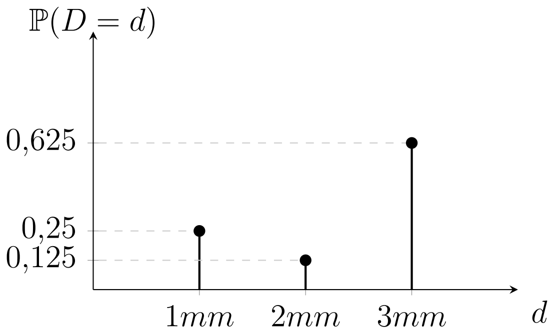
h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in fünf Paketen mindestens drei fehlerhafte Glühbirnen?

Aufgabe 3

In einer (unendlich) großen Kiste liegen drei verschiedene Schraubentypen: Schrauben mit $1mm$, $2mm$ und $3mm$ Durchmesser. Für die Zufallsvariable

$$D : \text{„Durchmesser der Schraube in der Kiste (in } mm\text{)“}$$

sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben durch:



a) Definieren Sie aus der Zufallsvariable D drei dichotome Zufallsvariablen E, F, G mit jeweils dem Wertebereich $\{0, 1\}$. Geben Sie jeweils die Verteilung (Verteilungstyp und -parameter) an.

Es werden drei Schrauben zufällig gezogen. Seien

$$S_k : \text{„Anzahl der gezogenen Schrauben mit Durchmesser } k\text{“ für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

b) Wie sind die Zufallsvariablen S_1, S_2 und S_3 **jeweils** und **zusammen** verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

c) Stellen Sie alle möglichen Realisierungen $s = (s_1, s_2, s_3)$ auf.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man
   i) nur $3mm$ Schrauben erhält.
   ii) zwei $1mm$ mm und eine $3mm$ Schraube erhält.
   iii) drei Schraubentypen erhält.

e) Berechnen Sie die Korrelation zwischen S_2 und S_3. Begründen Sie, wieso die beiden Zufallsvariablen stochastisch abhängig sind.

f) Sei Z : „Anzahl der gezogenen unterschiedlichen Schraubentypen“. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z.