Aufgabe 1

Sie machen einen Morgenspaziergang durch den Grunewald mit der Hoffnung Rehe zu sichten. Rehsichtungen treten räumlich zufällig und unabhängig voneinander auf. Sie durchstreifen eine Fläche von 1000 Ar ($1\ Ar = 100m^2$). Seien

$$X: \text{„Anzahl der Rehsichtungen auf der durchstreiften Fläche"},$$

$$Y: \text{„Anzahl der Rehsichtungen auf 500 } Ar\text{"}.$$

Teil A

Gehen Sie davon aus, dass es im Grunewald pro 1000 Ar durchschnittlich 6 Rehsichtungen gibt.

a) Wie sind die Zufallsvariablen X und Y jeweils verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

> $X \sim \mathrm{P}(6)$ und $Y \sim \mathrm{P}(3)$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie

i) genau zwei Rehsichtungen,

ii) höchstens vier Rehsichtungen,

iii) mindestens drei, aber weniger als sieben Rehsichtungen,

machen, wenn Sie eine Fläche von 1000 Ar durchstreifen.

> i) $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{6^2}{2!} \cdot e^{-6} \approx 0{,}0446$
>
> ii) $\mathbb{P}(X \leq 4) = \mathrm{F}(4) = 0{,}2851$
>
> iv) $\mathbb{P}(3 \leq X < 7) = \mathbb{P}(X \leq 6) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(6) - F(2) = 0{,}5443$

Teil B

Gehen Sie nun davon aus, dass man auf jedem Ar Wald mit Wahrscheinlichkeit 0,006 eine Rehsichtung macht.

c) Wie ist die Zufallsvariable X

i) exakt ii) approximativ

verteilt (Verteilungstyp und -parameter)? Prüfen Sie die Approximationskriterien.

> i) Exakt gilt $X \sim \mathrm{B}(n; \pi)$ mit $n = 1000$ und $\pi = 0{,}006$
> ii) Approximativ gilt $X \overset{\text{appr.}}{\sim} \mathrm{P}(\lambda)$, mit $\lambda = n \cdot \pi = 1000 \cdot 0{,}006 = 6$.
> Die Poisson-Approximation ist zulässig, da $n = 1000 > 30$ und $\pi = 0{,}006 \leq 0{,}05$.

Aufgabe 2

Ein schwedisches Unternehmen vertreibt Smart-Home Glühbirnen. Es ist bekannt, dass sich eine Glühbirne mit Wahrscheinlichkeit 0,4 nicht mit dem Smart-Home System verbinden lässt und somit als *fehlerhaft* gilt. Die Glühbirnen werden einzeln verpackt und versendet. Sei für $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Y_r : „Anzahl der versendeten Pakete bis zur r-ten fehlerhaften Glühbirne".

a) Wie ist die Zufallsvariable Y_r in Abhängigkeit von r verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

$Y_r \sim \text{NB}(r; \pi)$ mit $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\pi = 0{,}4$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich im zehnten Versandpaket die dritte fehlerhafte Glühbirne?

$\mathbb{P}(Y_3 = 10 = 7 + 3) = \binom{7+3-1}{7} \cdot 0{,}4^3 \cdot (1 - 0{,}4)^7 = \binom{9}{7} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 \approx 0{,}0645$

c) Zeigen Sie formal, dass der folgender Zusammenhang gilt. Beschreiben Sie diesen in Worten und begründen Sie.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Es gibt genau so viele Möglichkeiten, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholungen, k Elemente aus n Elementen auszuwählen wie $(n-k)$ Elemente aus n Elementen auszuwählen.
Eine Auswahl von k Elementen impliziert eine nicht-Auswahl von $n-k$ Elementen, d.h. es gibt genau so viele Möglichkeiten k Elemente auszuwählen wie $(n-k)$ nicht auszuwählen. Ob wir $(n-k)$ Elemente nicht auswählen oder auswählen liefert die gleiche Anzahl von Anordnungsmöglichkeiten; also folgt der obige Zusammenhang.

d) Zeigen Sie formal, dass die Wahrscheinlichkeit in b) auch mithilfe der Zufallsvariable Z : „Anzahl der fehlerhaften Pakete bei neun versendeten Paketen" berechnet werden kann. Beschreiben Sie diesen Zusammenhang inhaltlich.

Es ist $\mathbb{P}(Y_3 = 10) = \binom{9}{7} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = \underbrace{\binom{9}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^7}_{=\mathbb{P}(Z=2) \text{ mit } Z\sim \mathrm{B}(9;0{,}4)} \cdot 0{,}4 = \mathbb{P}(Z = 2) \cdot 0{,}4.$

Die Anordnung von Erfolgen und Misserfolgen ist zum Teil gegeben: Wir wissen, dass sich im zehnten Päckchen eine fehlerhafte Glühbirne befinden soll. Die übrigen zwei fehlerhaften Glühbirnen können sich auf die ersten neun Pakete verteilen. Das entspricht zwei Erfolgen bei neun Versuchen mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsvariable Z, also $\mathbb{P}(Z = 2)$ mit $Z \sim \mathrm{B}(9; 0{,}4)$.

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der versendeten Glühbirnen bis zum Auftreten der dritten fehlerhaften Glühbirne.

$\mathbb{E}(Y_3) = \frac{3}{0{,}4} = 7{,}5$

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich im fünften Versandpaket die erste fehlerhafte Glühbirne?

$\mathbb{P}(Y_1 = 5 = 4 + 1) = \binom{5+1-1}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot (1 - 0{,}4)^4 = 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}0518$

g) Welcher Verteilung folgt Y_1 noch? Begründen Sie.

Es gilt $Y_1 \sim \mathrm{G}(0{,}4)$.
Gibt die Zufallsvariable die Anzahl der versendeten Päckchen bis zur ersten fehlerhaften Glühbirne an, so ist die Anordnung von nicht-fehlerhaften und fehlerhaften Glühbirnen fest vorgegeben. Der Binomialkoeffizient, welcher die Anzahl der möglichen Anordnungen angibt, beträgt in diesem Fall 1. Die Berechnungsformel vereinfacht sich zur Formel für geometrisch verteilte Zufallsvariablen.

h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in fünf Paketen mindestens drei fehlerhafte Glühbirnen?

Sei T : „Anzahl der fehlerhaften Glühbirnen bei fünf versendeten Paketen“ mit $T \sim \mathrm{B}(3; 0{,}4)$. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{T \geq 3\}$, also

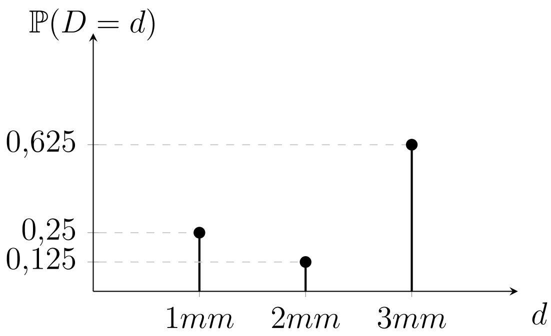
$$\mathbb{P}(T \geq 3) = 1 - F(2) = 0{,}3174.$$

Aufgabe 3

In einer (unendlich) großen Kiste liegen drei verschiedene Schraubentypen: Schrauben mit $1mm$, $2mm$ und $3mm$ Durchmesser. Für die Zufallsvariable

$$D: \text{„Durchmesser der Schraube in der Kiste (in } mm\text{)“}$$

sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben durch:



a) Definieren Sie aus der Zufallsvariable D drei dichotome Zufallsvariablen E, F, G mit jeweils dem Wertebereich $\{0, 1\}$. Geben Sie jeweils die Verteilung (Verteilungstyp und -parameter) an.

Sei

$$E := \begin{cases} 1, & \text{falls } D = 1 \text{ (Schraube hat Durchmesser } \mathbf{1}mm\text{)}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit $\pi_E = P(D = 1) = 0{,}25$. Es folgt $E \sim \text{Bernoulli}(0{,}25)$.
Sei

$$F := \begin{cases} 1, & \text{falls } D = 2 \text{ (Schraube hat Durchmesser } \mathbf{2}mm\text{)}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit $\pi_F = P(D = 2) = 0{,}125$. Es folgt $F \sim \text{Bernoulli}(0{,}125)$.
Sei

$$G := \begin{cases} 1, & \text{falls } D = 3 \text{ (Schraube hat Durchmesser } \mathbf{3}mm\text{)}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit $\pi_G = P(D = 3) = 0{,}625$. Es folgt $G \sim \text{Bernoulli}(0{,}625)$.

Es werden drei Schrauben zufällig gezogen. Seien

S_k : „Anzahl der gezogenen Schrauben mit Durchmesser k“ für $k \in \{1, 2, 3\}$.

b) Wie sind die Zufallsvariablen S_1, S_2 und S_3 **jeweils** und **zusammen** verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

Es gelten

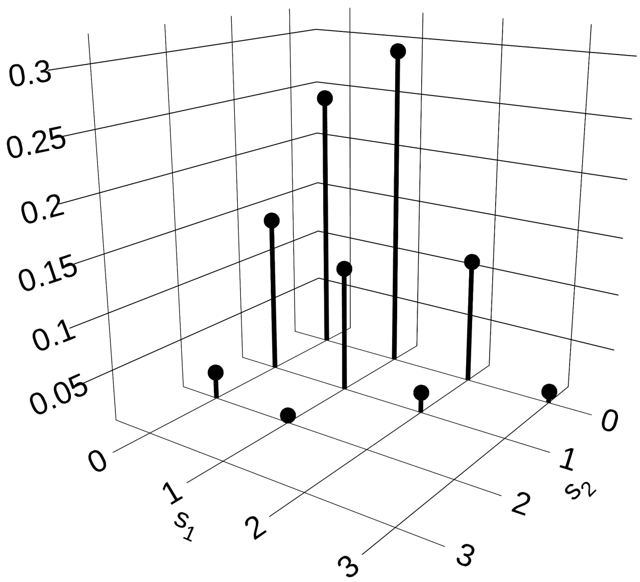
$$S_1 \sim \mathrm{B}(3; 0{,}25), \quad S_2 \sim \mathrm{B}(3; 0{,}125), \quad S_3 \sim \mathrm{B}(3; 0{,}625),$$

Zusatz: Dies folgt daraus, dass $S_1 := \sum_{i=1}^{3} E_i$, $S_2 := \sum_{i=1}^{3} F_i$ und $S_3 := \sum_{i=1}^{3} G_i$ gilt, wobei E_1, E_2, E_3 bzw. F_1, F_2, F_3 bzw. G_1, G_2, G_3 jeweils unabhängige und identisch verteilte Bernoulli-Zufallsvariablen mit den Erfolgswahrscheinlichkeiten $\pi_E = 0{,}25$ bzw. $\pi_F = 0{,}125$ bzw. $\pi_G = 0{,}625$ sind.

Die Zufallsvariablen S_1, S_2, S_3 bilden zusammen den Zufallsvektor $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ mit

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3) \sim \mathrm{M}(3; 0{,}25, 0{,}125, 0{,}625).$$

Zusatz: Dies folgt daraus, dass S_1, S_2, S_3 jeweils binomialverteilt mit dem gleichen Parameter $n = 3$ sind und die Bedingung $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_E + \pi_F + \pi_G = 1$ erfüllt ist. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathbf{S}$ kann wie folgt visualisiert werden:



c) Stellen Sie alle möglichen Realisierungen $s = (s_1, s_2, s_3)$ auf.

Es gilt $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \{(3,0,0); (0,3,0); (0,0,3); (1,1,1); (2,1,0); (2,0,1); (1,2,0); (0,2,1); (1,0,2); (0,1,2)\}$.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man

i) nur $3mm$ Schrauben erhält.

ii) zwei $1mm$ mm und eine $3mm$ Schraube erhält.

iii) drei Schraubentypen erhält.

i) $\mathbb{P}(\mathbf{S} = (0,0,3)) = \frac{3!}{0! \cdot 0! \cdot 3!} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}625^3 = \frac{125}{512} \approx 0{,}2441$

ii) $\mathbb{P}(\mathbf{S} = (2,0,1)) = \frac{3!}{2! \cdot 0! \cdot 1!} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}125^0 \cdot 0{,}625^1 = \frac{60}{512} \approx 0{,}1172$

iii) $\mathbb{P}(\mathbf{S} = (1,1,1)) = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}125^1 \cdot 0{,}625^1 = \frac{60}{512} \approx 0{,}1172$

e) Berechnen Sie die Korrelation zwischen S_2 und S_3. Begründen Sie, wieso die beiden Zufallsvariablen stochastisch abhängig sind.

Da (S_1, S_2, S_3) *multinomialverteilt* ist gilt für die (theoretische) Kovarianz von S_2 und S_3,

$$Cov(S_2, S_3) = -n \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 = -3 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}625 = -\frac{15}{64},$$

und für die (theoretische) Korrelation zwischen S_2 und S_3,

$$\rho(S_2, S_3) = \frac{Cov(S_2, S_3)}{\sqrt{Var(S_2)} \cdot \sqrt{Var(S_3)}} = \frac{-\frac{15}{64}}{\sqrt{\frac{21}{64}} \cdot \sqrt{\frac{45}{64}}} = -0{,}48795,$$

wobei genutzt wurde, dass $S_2 \sim \mathrm{B}(3; 0{,}125)$ und $S_3 \sim \mathrm{B}(3; 0{,}625)$.

Da jeder Zug einer $2mm$ Schraube impliziert, dass keine $3mm$ Schraube gezogen wurde, besteht eine stochastische Abhängigkeit zwischen S_2 und S_3.

f) Sei Z : „Anzahl der gezogenen unterschiedlichen Schraubentypen". Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z.

Es ist $Z : \Omega \to \{1, 2, 3\}$

$$\text{mit } \Omega = \{(3,0,0); (0,3,0); (0,0,3); (1,1,1); \\ (2,1,0); (2,0,1); (1,2,0); (0,2,1); (1,0,2); (0,1,2)\}$$

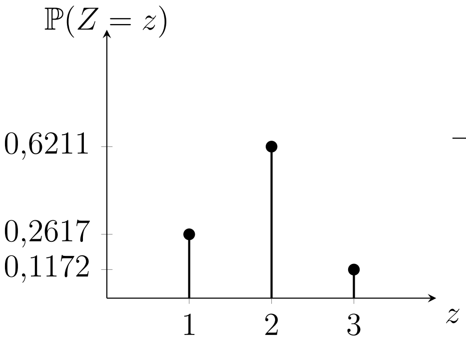
Es gilt

$$Z(3,0,0) = Z(0,3,0) = Z(0,0,3) = 1 \quad \text{und} \quad Z(1,1,1) = 3 \quad \text{und}$$
$$Z(2,1,0) = Z(2,0,1) = Z(1,2,0) = Z(0,2,1) = Z(1,0,2) = Z(0,1,2) = 2$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(\mathbf{S} = (3,0,0)) + \mathbb{P}(\mathbf{S} = (0,3,0)) + \mathbb{P}(\mathbf{S} = (0,0,3)) \\
&= \frac{3!}{3!} \cdot (0{,}25^3 + 0{,}125^3 + 0{,}625^3) = \frac{134}{512} \approx 0{,}2617 \\
\mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}(\mathbf{S} = (2,1,0)) + \mathbb{P}(\mathbf{S} = (2,0,1)) + \mathbb{P}(\mathbf{S} = (1,2,0)) + \mathbb{P}(\mathbf{S} = (0,2,1)) \\
&\quad + \mathbb{P}(\mathbf{S} = (1,0,2)) + \mathbb{P}(\mathbf{S} = (0,1,2)) \\
&= \frac{3!}{2! \cdot 1!} \Big(0{,}25^2 \cdot 0{,}125^1 + 0{,}25^2 \cdot 0{,}625^1 + 0{,}25^1 \cdot 0{,}125^2 + 0{,}125^2 \cdot 0{,}625^1 \\
&\quad + 0{,}25^1 \cdot 0{,}625^2 + 0{,}125^1 \cdot 0{,}625^2 \Big) = \frac{318}{512} \approx 0{,}6211 \\
\mathbb{P}(Z = 3) &= \mathbb{P}(\mathbf{S} = (1,1,1)) = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}625 = \frac{60}{512} \approx 0{,}1172
\end{aligned}$$

Alternativ: $\mathbb{P}(Z = 3) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) - \mathbb{P}(Z = 2) = 1 - \frac{134}{512} - \frac{318}{512} = \frac{60}{512}$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für $Z \in \{1, 2, 3\}$ ist also:



z	1	2	3
$\mathbb{P}(Z = z)$	0,2617	0,6211	0,1172