## Aufgabe 1

### Teil A

Ein Random-Number-Generator generiert zufällig eine *reelle Zahl* aus dem Intervall $[0, 10]$. Sei

$$X : \text{„die zufällig generierte Zahl"}.$$

a) Wie ist die Zufallsvariable $X$ verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

b) Geben Sie die Dichtefunktion von $X$ an und skizzieren Sie diese.

c) Prüfen Sie formal, ob es sich bei der Dichtefunktion von $X$ um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

d) Leiten Sie die Verteilungsfunktion von $X$ formal aus der Dichtefunktion her und skizzieren Sie diese.

e) Berechnen Sie $F(0)$, $F(10)$ und verbalisieren Sie das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

f) Berechnen Sie **per Hand** den Erwartungswert und die Varianz von $X$. (Hinweis: *Per Hand* impliziert, dass die Rechnung über die *Definition des Erwartungswertes bzw. der Varianz* durchzuführen ist.)

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl

   i) null ist,

   ii) mindestens acht ist,

   iii) mindestens zwei, aber niedriger als neun ist

   Markieren Sie die Wahrscheinlichkeiten in der in b) skizzierten Dichtefunktion.

h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl größer als 8, wenn bekannt ist, dass die Zahl größer als 5 ist.

### Teil B

Nehmen sie nun an, dass der Random-Number-Generator eine *ganze Zahl* aus dem Intervall $[0, 10]$ generiert.

i) Wie ist $X$ nun verteilt (Verteilungstyp und -parameter)? Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie die Verteilungsfunktion von $X$.

j) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl null? Warum unterscheidet sich dieses Ergebnis von dem in g) i)?

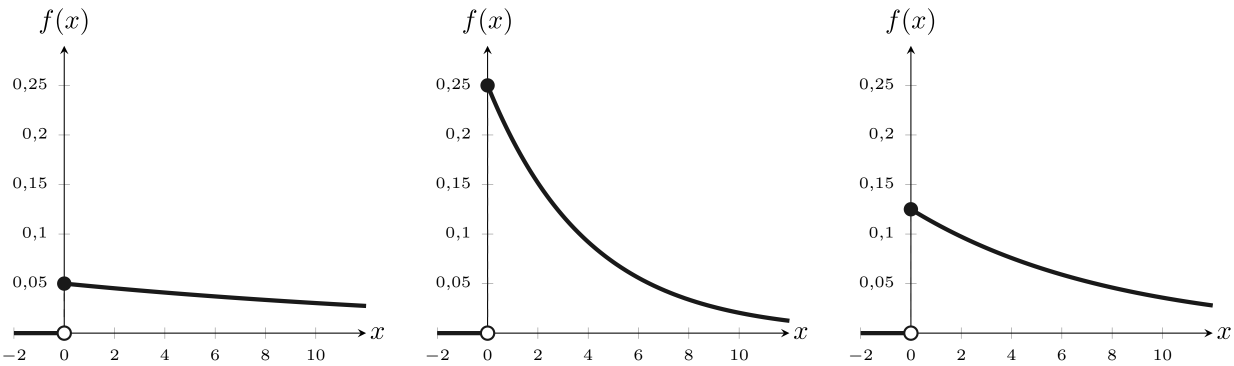
### Aufgabe 2

Auch moderne Server sind von Ausfällen betroffen. Es laufen drei Server gleichzeitig, jedoch ohne sich gegenseitig zu beinflussen. Server 1 fällt im Durchschnitt alle vier, Server 2 alle acht und Server 3 alle zwanzig Stunden aus. Seien

$$X_i: \text{„Zeit bis zum Ausfall von Server } i \text{ (in Std.)“ mit } i \in \{1, 2, 3\}.$$

a) Wie sind die Zufallsvariablen $X_1$, $X_2$ und $X_3$ verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

b) Nachstehend sind die Wahrscheinlichkeitsdichten der Zufallsvariablen $X_1$, $X_2$ und $X_3$ gegeben. Ordnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten ihrer Zufallsvariable zu.




c) Zeigen Sie formal, dass es sich bei der Dichtefunktion von $X_1$ um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X_1$.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit bis zum nächsten Ausfall von Server 1

   i) weniger als vier Stunden,

   ii) mehr als sieben Stunden,

   iii) zwischen dreieinhalb und acht Stunden

   beträgt. Markieren Sie die Wahrscheinlichkeiten in der in b) gegebenen zugehörigen Dichtefunktion.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt innerhalb von zehn Stunden mindestens ein Server aus?

g) Server 1 läuft bereits seit 10 Stunden ohne Ausfall. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es innerhalb der nächsten vier Stunden zu einem Ausfall? Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit e) i). Auf welche Eigenschaft ist dieser Zusammenhang zurückzuführen?

### Aufgabe 3

Betrachten Sie die Miethöhe *aller* Berliner Wohnungen mit einer Fläche von 50m$^2$. Sei

$X$ : „Miete einer zufällig ausgewählten 50m$^2$ Wohnung in Berlin (in EUR)“.

**Hinweis**: Bearbeiten Sie nachfolgende Teilaufgaben jeweils **separat** für *i)* und *ii)*.

**Teil A**
Im Folgenden werden zwei verschiedene Szenarien für die Verteilung von $X$ betrachtet: $X$ ist

i) *stetig gleichverteilt* auf $[800, 2000]$. ii) *einpunktverteilt* auf $x = 1400$.

a) Ist $X$ eine diskrete oder stetige Zufallsvariable? Skizzieren Sie die Dichte- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie die Verteilungsfunktion von $X$ für beide Szenarien.

b) Geben Sie für beide Szenarien das Ereignis $A$ an, für welches $\mathbb{P}(A) = 1$ gilt.

**Teil B**
Im Folgenden wird die Miethöhe nun in Gruppen eingeteilt. Es ergibt sich folgenden Einteilung:

| j | Gruppe j | $\mathbb{P}(X \in \text{Gruppe j})$ |
|---|---|---|
| 1 | [ 800 ; 1000) | 0,25 |
| 2 | [1000 ; 1400) | 0,35 |
| 3 | [1400 ; 1500) | 0,20 |
| 4 | [1500 ; 2000] | 0,20 |

Es werden zwei verschiedene Szenarien für die Verteilung von $X$ *innerhalb einer Gruppe* für alle Gruppen $j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, betrachtet: $X$ ist

i) *stetig gleichverteilt* innerhalb Gruppe j. ii) *einpunktverteilt* auf der Mitte der Gruppe j.

c) Skizzieren Sie die neue Dichtefunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie die Verteilungsfunktion von $X$ für beide Szenarien.

d) Woran erinnert die Form der Dichtefunktion in c)?

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $X$ unter der Verteilungsannahme in ii). Interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

f) Es wird eine Stichprobe unter 4000 Berliner Haushalten mit einer Wohnfläche von $50m^2$ erhoben. Die resultierenden relativen Häufigkeiten der Mietpreisklassen können der Tabelle aus *Tutoriumsblatt 3, Aufgabe 1 b)* entnommen werden. Erläutern Sie, weshalb diese empirisch ermittelten relativen Häufigkeiten von den in *Teil B* postulierten Gruppenwahrscheinlichkeiten abweichen.