Aufgabe 1

Teil A

Ein Random-Number-Generator generiert zufällig eine *reelle Zahl* aus dem Intervall $[0, 10]$. Sei

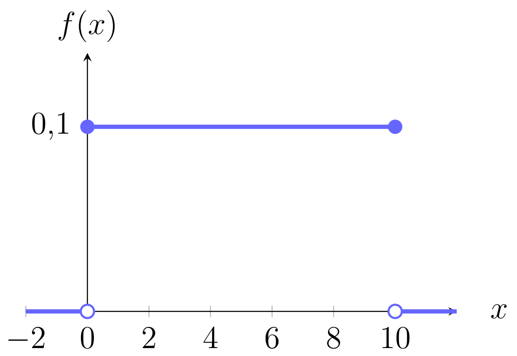
$$X : \text{„die zufällig generierte Zahl“}.$$

a) Wie ist die Zufallsvariable X verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

$X \sim \mathrm{U}([0; 10])$

b) Geben Sie die Dichtefunktion von X an und skizzieren Sie diese.

Dichtefunktion von X:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Prüfen Sie formal, ob es sich bei der Dichtefunktion von X um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

Die (Wahrscheinlichkeits-)dichtefunktion f einer stetigen Zufallsvariable muss die Bedingungen (i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$ erfüllen (vgl. Formelsammlung S.15).

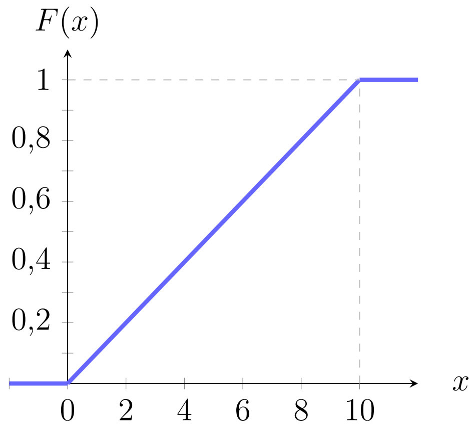
- Aus der Definition von $f(x)$ in b) ist erkennbar, dass $f(x) \in \{\frac{1}{10}, 0\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{10} \frac{1}{10}\ dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_0^{10} = (\frac{1}{10} \cdot 10) - (\frac{1}{10} \cdot 0) = 1$

Damit handelt es sich bei f um eine (Wahrscheinlichkeits-)Dichtefunktion.

d) Leiten Sie die Verteilungsfunktion von X formal aus der Dichtefunktion her und skizzieren Sie diese.

Verteilungsfunktion von X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{10}\, dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_0^x = \frac{1}{10}x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & \text{falls } x > 10 \end{cases}$$



e) Berechnen Sie $F(0)$, $F(10)$ und verbalisieren Sie das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

$$F(0) = \frac{1}{10} \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad F(10) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 ist die generierte Zahl kleiner gleich 0. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 ist sie kleiner gleich 10. Daraus folgt, dass die Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 im Intervall $[0, 10]$ liegt.

f) Berechnen Sie **per Hand** den Erwartungswert und die Varianz von X. (Hinweis: *Per Hand* impliziert, dass die Rechnung über die *Definition des Erwartungswertes bzw. der Varianz* durchzuführen ist.)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx = \int_{0}^{10} x \cdot f(x)\ dx = \frac{1}{10} \cdot \int_{0}^{10} 1x\ dx \\
&= \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10} = \frac{1}{10} \cdot \left[(\frac{1}{2} \cdot 10^2) - (\frac{1}{2} \cdot 0^2)\right] = \frac{1}{10} \cdot 50 = 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x - \mathbb{E}(X)\Big)^2 \cdot f(x)\ dx = \int_{0}^{10} \Big(x - \mathbb{E}(X)\Big)^2 \cdot f(x)\ dx \\
&= \int_{0}^{10} \Big(x - 5\Big)^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \int_{0}^{10} (x^2 - 10x + 25)\ dx \\
&= \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left[(\frac{1}{3} \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10) - 0\right] = \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl

i) null ist,

ii) mindestens acht ist,

iii) mindestens zwei, aber niedriger als neun ist

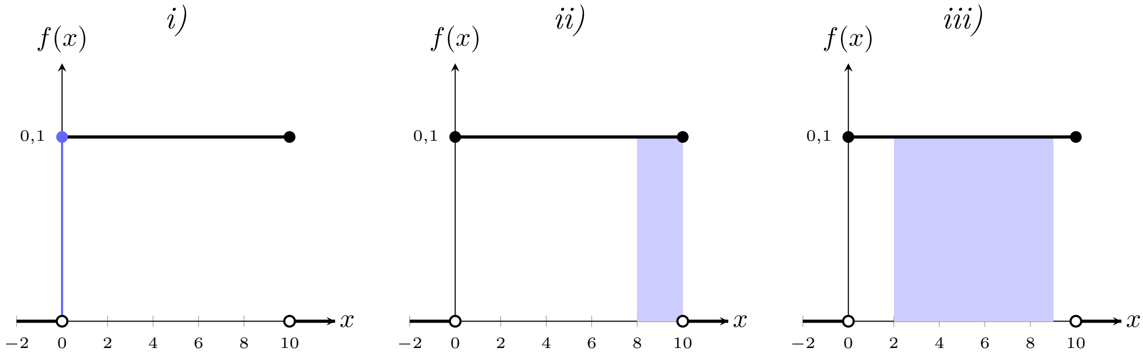
Markieren Sie die Wahrscheinlichkeiten in der in b) skizzierten Dichtefunktion.

i) $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, da X eine stetige Zufallsvariable ist.

ii) $\mathbb{P}(X \geq 8) = 1 - \mathbb{P}(X < 8) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 8) = 1 - F(8) = 1 - \frac{1}{10} \cdot 8 = \frac{2}{10}$

iii) $$\mathbb{P}(2 \leq X < 9) = \mathbb{P}(X < 9) - \mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X \leq 9) - \mathbb{P}(X \leq 2)$$
$$= F(9) - F(2) = \frac{1}{10} \cdot 9 - \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{7}{10}$$

Alternativ: $\mathbb{P}(2 \leq X < 9) = \int_2^9 \frac{1}{10}\, dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_2^9 = \frac{9}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$



h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl größer als 8, wenn bekannt ist, dass die Zahl größer als 5 ist.

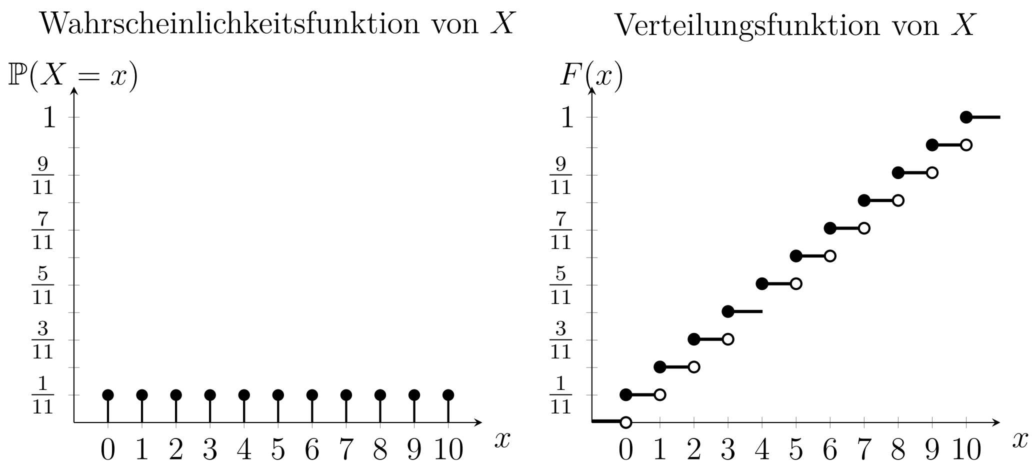
$$\mathbb{P}(X \geq 8 \mid X > 5) = \frac{\mathbb{P}(\{X \geq 8\} \cap \{X > 5\})}{\mathbb{P}(X > 5)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq 8)}{\mathbb{P}(X > 5)} = \frac{1 - F(8)}{1 - F(5)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$$

Teil B

Nehmen sie nun an, dass der Random-Number-Generator eine *ganze Zahl* aus dem Intervall $[0, 10]$ generiert.

i) Wie ist X nun verteilt (Verteilungstyp und -parameter)? Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie die Verteilungsfunktion von X.

X ist *diskret gleichverteilt auf* $\{0; 1; 2; ...; 10\}$.



j) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl null? Warum unterscheidet sich dieses Ergebnis von dem in g) i)?

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{11}$$

Das Ergebnis unterscheidet sich von dem in g) i), da die Zufallsvariable nun diskret ist und die Punktwahrscheinlichkeit damit größer als 0 sein kann.

Aufgabe 2

Auch moderne Server sind von Ausfällen betroffen. Es laufen drei Server gleichzeitig, jedoch ohne sich gegenseitig zu beinflussen. Server 1 fällt im Durchschnitt alle vier, Server 2 alle acht und Server 3 alle zwanzig Stunden aus. Seien

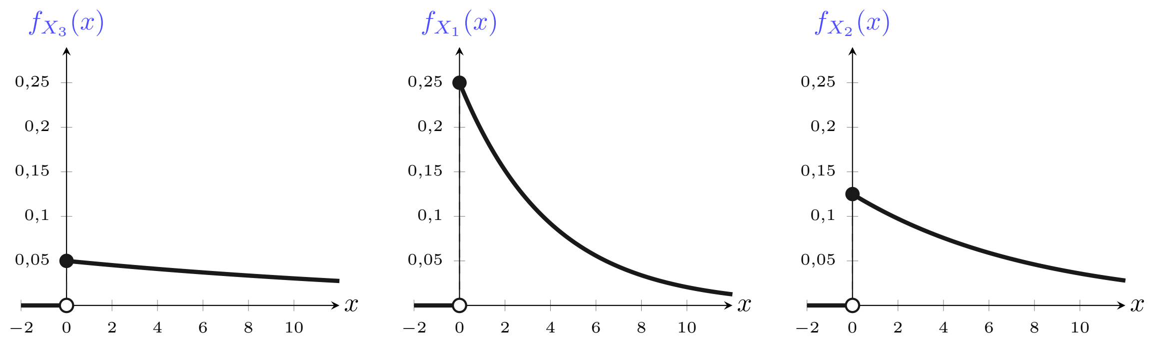
$$X_i : \text{„Zeit bis zum Ausfall von Server } i \text{ (in Std.)“ mit } i \in \{1, 2, 3\}.$$

a) Wie sind die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

$$X_1 \sim \mathrm{E}(\lambda_1) \text{ mit } \lambda_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25, \qquad X_2 \sim \mathrm{E}(\lambda_2) \text{ mit } \lambda_2 = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

$$X_3 \sim \mathrm{E}(\lambda_3) \text{ mit } \lambda_3 = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

b) Nachstehend sind die Wahrscheinlichkeitsdichten der Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 gegeben. Ordnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten ihrer Zufallsvariable zu.



c) Zeigen Sie formal, dass es sich bei der Dichtefunktion von X_1 um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

- Aus Skizze in b) ist erkennbar, dass $f_{X_1}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- $$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x)\, dx = \int_0^{\infty} 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25 \cdot x}\, dx = 0{,}25 \cdot \int_0^{\infty} e^{-0{,}25 \cdot x}\, dx$$
  $$= 0{,}25 \cdot \Big[-4e^{-0{,}25 \cdot x} \Big]_0^{\infty} = 0{,}25 \cdot \Big[\underbrace{(-4e^{-0{,}25 \cdot x})}_{\longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow \infty} \} - \underbrace{(-4e^{-0{,}25 \cdot 0})}_{=-4} \Big]$$
  $$= 0{,}25 \cdot 4 = 1$$

Damit handelt es sich bei f_{X_1} um eine (Wahrscheinlichkeits-)Dichtefunktion.

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1.

$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{0{,}25} = 4$ und $Var(X_1) = \frac{1}{(0{,}25)^2} = 16$

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit bis zum nächsten Ausfall von Server 1

i) weniger als vier Stunden,

ii) mehr als sieben Stunden,

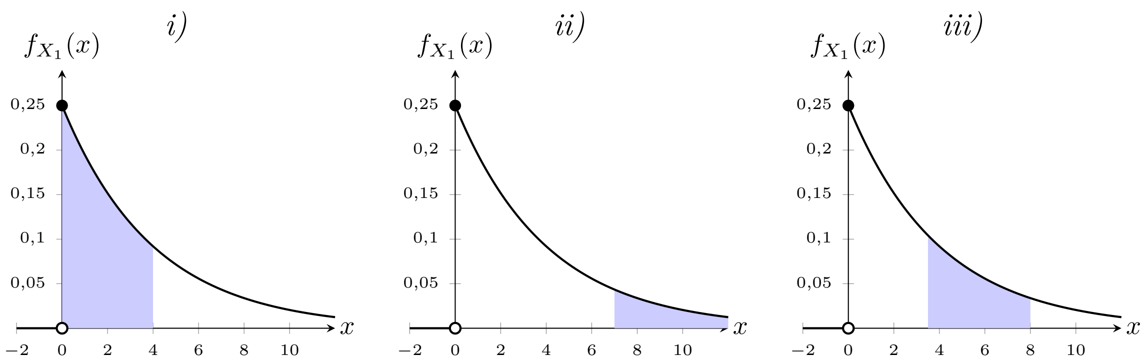
iii) zwischen dreieinhalb und acht Stunden

beträgt. Markieren Sie die Wahrscheinlichkeiten in der in b) gegebenen zugehörigen Dichtefunktion.

i) $\mathbb{P}(X_1 < 4) = \mathbb{P}(X_1 \leq 4) = 1 - e^{-0{,}25 \cdot 4} \approx 0{,}6321$

ii) $\mathbb{P}(X_1 > 7) = e^{-0{,}25 \cdot 7} \approx 0{,}1738$

iii) $$\begin{aligned}\mathbb{P}(3{,}5 \leq X_1 \leq 8) &= \mathbb{P}(X_1 \leq 8) - \mathbb{P}(X_1 < 3{,}5)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq 8) - \mathbb{P}(X_1 \leq 3{,}5)\\ &= 1 - e^{-0{,}25 \cdot 8} - (1 - e^{-0{,}25 \cdot 3{,}5}) = 0{,}2815\end{aligned}$$



f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt innerhalb von zehn Stunden mindestens ein Server aus?

Sei $A :=$ „In den ersten zehn Stunden fällt kein Server aus“, wobei gilt

$$A = \{X_1 > 10\} \cap \{X_2 > 10\} \cap \{X_3 > 10\}.$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses von A, also $\bar{A}$. Unter Ausnutzung der *vollständigen stochastischen Unabhängigkeit* von X_1, X_2 und X_3 gilt nun:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 > 10\} \cap \{X_2 > 10\} \cap \{X_3 > 10\}) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X_1 > 10) \cdot \mathbb{P}(X_2 > 10) \cdot \mathbb{P}(X_3 > 10)) \\
&= 1 - (e^{-0{,}25 \cdot 10} \cdot e^{-0{,}125 \cdot 10} \cdot e^{-0{,}05 \cdot 10}) \approx 0{,}9857.
\end{aligned}$$

g) Server 1 läuft bereits seit 10 Stunden ohne Ausfall. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es innerhalb der nächsten vier Stunden zu einem Ausfall? Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit e) i). Auf welche Eigenschaft ist dieser Zusammenhang zurückzuführen?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \leq 10 + 4 |\ X_1 > 10) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > 14 |\ X_1 > 10) \\
&\overset{(\star)}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 > 4) = \mathbb{P}(X_1 \leq 4) \\
&= 1 - e^{-0{,}25 \cdot 4} \approx 0{,}6321.
\end{aligned}$$

In $(\star)$ wird die Eigenschaft der *Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung* ausgenutzt. Das Ergebnis ist damit identisch zu e) i).

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Miethöhe *aller* Berliner Wohnungen mit einer Fläche von 50m^2. Sei

$$X: \text{„Miete einer zufällig ausgewählten } 50\text{m}^2 \text{ Wohnung in Berlin (in EUR)“}.$$

Hinweis: Bearbeiten Sie nachfolgende Teilaufgaben jeweils **separat** für *i)* und *ii)*.

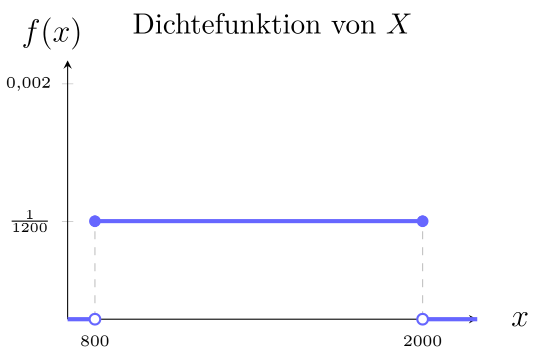
Teil A

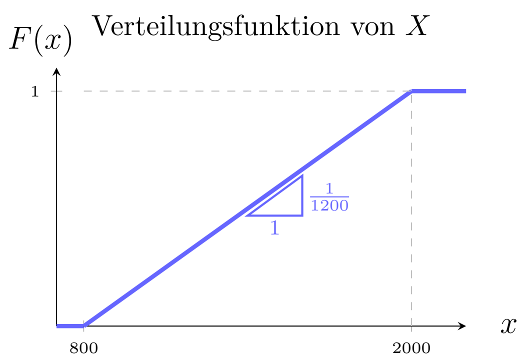
Es werden zwei verschiedene Szenarien für die Verteilung von X betrachtet: X ist

i) *stetig gleichverteilt* auf $[800, 2000]$. ii) *einpunktverteilt* auf $x = 1400$.

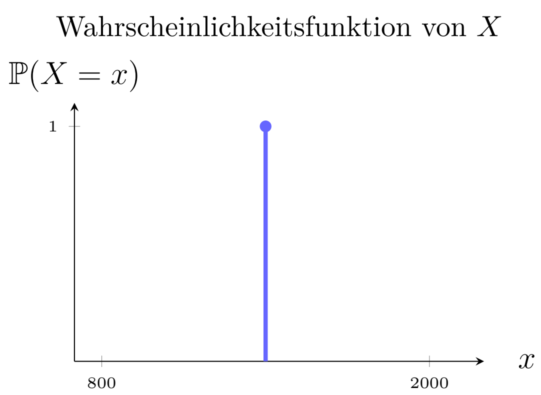
a) Ist X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable? Skizzieren Sie die Dichte- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie die Verteilungsfunktion von X.

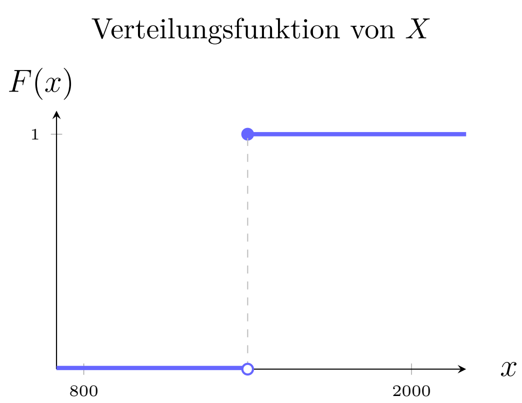
i) Unter der Annahme einer *stetige Gleichverteilung* ist X eine *stetige* Zufallsvariable mit der Dichtefunktion:





ii) Unter der Annahme einer *Einpunktverteilung* ist X eine *diskrete* Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion:





b) Geben Sie für beide Szenarien das Ereignis A an für welches $\mathbb{P}(A) = 1$ gilt.

i) $A := \{X \in [800, 2000]\} = \{800 \leq X \leq 2000\}$ **ii)** $A := \{X = 1400\}$

Teil B

Im Folgenden wird die Miethöhe nun in Gruppen eingeteilt. Es ergibt sich folgenden Einteilung:

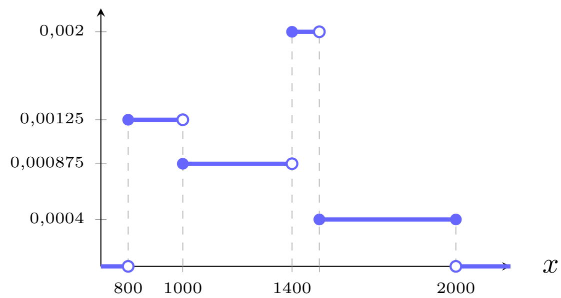
j	Gruppe j	$\mathbb{P}(X \in \text{Gruppe j})$
1	[800 ; 1000)	0,25
2	[1000 ; 1400)	0,35
3	[1400 ; 1500)	0,20
4	[1500 ; 2000]	0,20

Es werden zwei verschiedene Szenarien für die Verteilung von X *innerhalb einer Gruppe* für alle Gruppen j, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, betrachtet: X ist

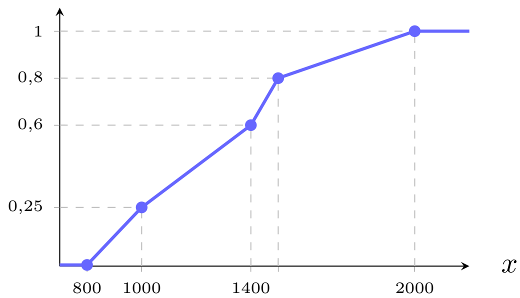
i) *stetig gleichverteilt* innerhalb Gruppe j. ii) *einpunktverteilt* auf der Mitte der Gruppe j.

c) Skizzieren Sie die neue Dichtefunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion sowie die Verteilungsfunktion von X für beide Szenarien.

i) $\tilde{f}(x)$ Dichtefunktion von X

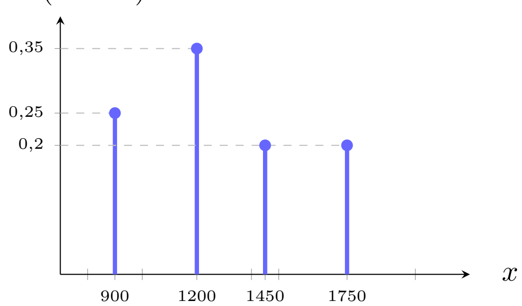


$F(x)$ Verteilungsfunktion von X



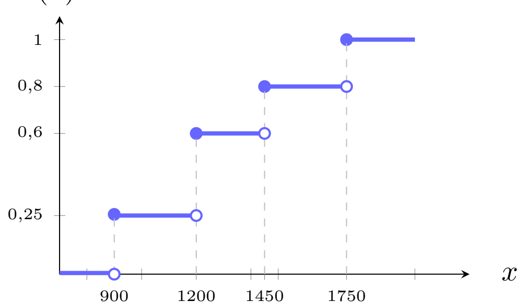
ii) Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

$\mathbb{P}(X = x)$



Verteilungsfunktion von X

$F(x)$



d) Woran erinnert die Form der Dichtefunktion in c)?

Unter der Annahme einer *stetigen Gleichverteilung innerhalb jeder Gruppe* ergibt sich eine stückweise konstante Dichtefunktion, deren Graph den horizontalen Linien eines *Histogramms* entspricht.

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X unter der Verteilungsannahme in ii). Interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

$\mathbb{E}(X) = 900 \cdot 0{,}25 + 1200 \cdot 0{,}35 + 1450 \cdot 0{,}2 + 1750 \cdot 0{,}2 = 1285$

Wählt man sehr viele $50m^2$-Wohnungen in Berlin zufällig aus, so ist mit einer durchschnittlichen Miethöhe von circa 1285 EUR pro Wohnung zu rechnen.

f) Es wird eine Stichprobe unter 4000 Berliner Haushalten mit einer Wohnfläche von $50m^2$ erhoben. Die resultierenden relativen Häufigkeiten der Mietpreisklassen können der Tabelle aus *Tutoriumsblatt 3, Aufgabe 1 b)* entnommen werden. Erläutern Sie, weshalb diese ermittelten relativen Häufigkeiten von den in *Teil B* gegebenen Gruppenwahrscheinlichkeiten abweichen.

Wir beobachten:

		Teil B	**Blatt 3, Aufg. 1b)**
j	Gruppe j	$\mathbb{P}(X \in \text{Gruppe } j)$	f_j
1	[800 ; 1000)	0,25	0,3
2	[1000 ; 1400)	0,35	0,4
3	[1400 ; 1500)	0,20	0,2
4	[1500 ; 2000]	0,20	0,1

Die Stichprobe stellt nur einen Ausschnitt der Grundgesamtheit dar. Aufgrund der *zufälligen Auswahl* von $n = 4000$ $50m^2$-Wohnungen (=statistische Einheit) aus der Grundgesamtheit weichen die beobachteten relativen Häufigkeiten f_j in der Stichprobe von den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \in \text{Gruppe } j)$ der Grundgesamtheit ab.
Zusatz: Mit wachsendem Stichprobenumfang „überdeckt“ die Stichprobe zunehmend die Grundgesamtheit, sodass sich die relativen Häufigkeiten den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeiten annähern.