Aufgabe 1

Eine Social-Media-Plattform modelliert die tägliche Screentime ihrer Nutzer, welche in Gruppe 1 und Gruppe 2 unterteilt wurden. Seien

X : „tägliche Screentime eines zufällig ausgewählten Nutzers aus Gruppe 1 (in Std.)“,

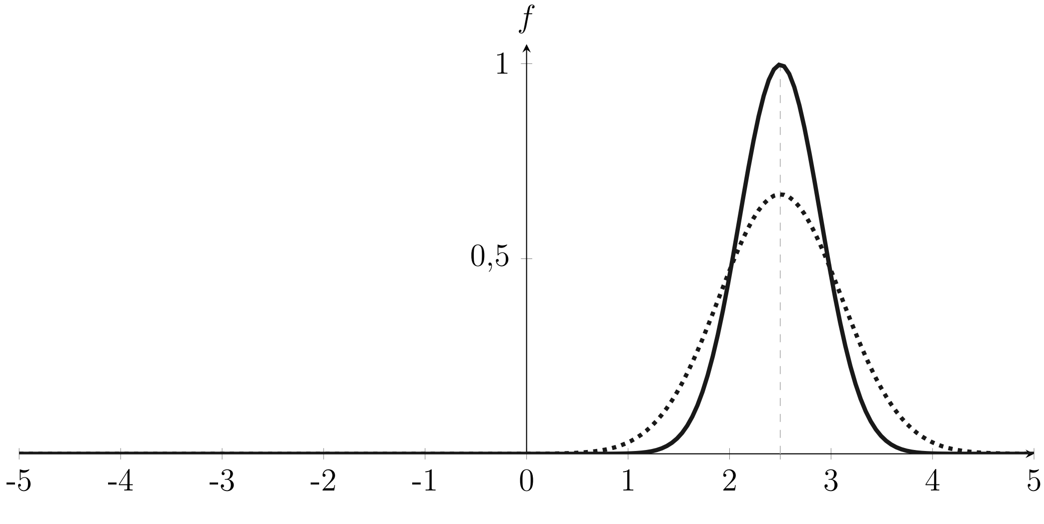
Y : „tägliche Screentime eines zufällig ausgewählten Nutzers aus Gruppe 2 (in Std.)“.

Es wird angenommen, dass die Screentime in beiden Gruppen normalverteilt ist. Für beide Gruppen liegt der Erwartungswert der täglichen Nutzungsdauer bei 2,5 Stunden ($\mu_X = \mu_Y$). Die beiden Gruppen unterscheiden sich jedoch in ihrer Streuung σ. Es gelten $\sigma_X = 0{,}4$ und $\sigma_Y = 0{,}6$.

Teil A

a) Geben Sie die Verteilung von X und Y jeweils an (Verteilungstyp und -parameter).

b) Ordnen Sie die nachstehenden Dichtefunktionen den Zufallsvariablen X und Y zu.



Betrachten Sie nun die folgenden Transformationen der Zufallsvariable X:

i) $\tilde{X} := X - \mathbb{E}(X)$ ii) $Z := \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}}$

c) Wie sind die Zufallsvariable $\tilde{X}$ und Z jeweils verteilt (Verteilungstyp- und parameter)? Berechnen Sie hierfür den jeweiligen Erwartungswert und die Varianz. Geben Sie die Dichtefunktion von $\tilde{X}$ und Z explizit an und skizzieren Sie diese in dem Koordinatensystem in b). Wie nennt man diese Transformationen?

d) Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z kann formal gezeigt werden, dass die nachfolgenden Symmetrieeigenschaften gelten:

$$\text{i) } \varphi(z) = \varphi(-z) \quad \text{ii) } \mathbb{P}(Z \leq -z) = \mathbb{P}(Z \geq z) \quad \text{iii) } \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}$, wobei φ die Dichtefunktion und Φ die Verteilungsfunktion von Z darstellen. Visualisieren Sie die nachfolgenden Eigenschaften jeweils für den Fall $\boldsymbol{z = 1}$ in den bereitgestellten Skizzen.

e) Übertragen Sie die in d) gegebenen Symmetrieeigenschaften der Standardnormalverteilung auf eine normalverteilte Zufallsvariablen X. Es ist keine formale Herleitung erforderlich.

f) Berechnen Sie für einen Nutzer aus Gruppe 1 die Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Screentime

   i) weniger als 4 Stunden beträgt.

   ii) mehr als 2 Stunden beträgt.

   iii) zwischen 2 und 3 Stunden beträgt.

   Veranschaulichen Sie die in iii) berechnete Wahrscheinlichkeit, indem Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsmasse als Fläche unter der Dichtefunktion von X und Z in b) markieren.

Teil B

Ein Nutzer wird als „Digital Addict“ eingestuft, sofern seine tägliche Screentime das 95te Perzentil der Verteilung X überschreitet. Die Grundgesamtheit setzt sich dabei zu zwei Dritteln aus Nutzern der Gruppe 1 und zu einem Drittel aus Nutzern der Gruppe 2 zusammen.

g) Berechnen Sie die tägliche Screentime, ab der ein Nutzer als „Digital Addict“ gilt.

h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt ein zufällig ausgewählter Nutzer aus Gruppe 2 als „Digital Addict“?

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt ein zufällig ausgewählter Nutzer als „Digital Addict“?

Teil C

Es wird angenommen, dass jede studentische Wohngemeinschaft (WG) aus genau drei Personen besteht. Dabei gehören Person 1 und Person 2 der Gruppe 1 an, während Person 3 der Gruppe 2 angehört. Die Mediennutzungsdauer der einzelnen Personen erfolgt unabhängig voneinander. Sei

S : „durchschnittliche tägliche Screentime pro Kopf in einer zufällig ausgewählten WG“.

j) Wie ist die Zufallsvariable S verteilt (Verteilungstyp und -parameter)?

k) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Screentime von Person 3 größer als die Screentime von Person 1 und 2 zusammen? Definieren Sie hierfür eine neue Zufallsvariable.

Aufgabe 2

Ein Online-Händler weiß, dass 20% der 100 täglich versendeten Pakete als Retouren zurückgesendet werden. Sei

X : „Anzahl der an einem zufällig ausgewählten Tag retournierten Pakete“.

a) Wie ist die Zufallsvariable X
   i) exakt,
   ii) approximativ

   verteilt (Verteilungstyp und -parameter)? Prüfen Sie die Approximationskriterien.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Pakete retourniert werden nach der exakten **und** approximativen Verteilung? Um wie viel Prozent überschätzt die Approximation die wahre Wahrscheinlichkeit?

c) Mit welcher approximativen Wahrscheinlichkeit werden mehr als 30% der Pakete retourniert? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit einmal mit **und** einmal ohne Stetigkeitskorrektur.

Aufgabe 3

In einem Berliner Bezirk werden pro Stunde durchschnittlich 30 Fahrten eines Car-Sharing Unternehmens beendet. Sei

Y : „Anzahl der in einer zufällig ausgewählten Stunde beendeten Fahrten".

a) Wie ist die Zufallsvariable X

   i) exakt,

   ii) approximativ

   verteilt (Verteilungstyp und -parameter)? Prüfen Sie die Approximationskriterien.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 30 Fahrten beendet werden nach der exakten **und** approximativen Verteilung?

c) Mit welcher approximativen Wahrscheinlichkeit werden zwischen 25 und 35 Fahrten beendet? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit einmal mit **und** einmal ohne Stetigkeitskorrektur.